La enseñanza de las matemáticas. Un problema pendiente

César Sáenz de Castro

«...Y, sin embargo, se puede enseñar ciencia». Así titulaba Pozo (1987, p. 109) un artículo que cerraba un estudio monográfico sobre el cambio conceptual y enseñanza de las ciencias y cuyo primer párrafo no nos resistimos a transcribir:

> El cuadro que ofrecen en conjunto las investigaciones sobre la comprensión y el aprendizaje de la ciencia por los adolescentes puede parecer desolador a más de un lector: los alumnos tienen serios problemas para aplicar correctamente estrategias de pensamiento formal a tareas científicas; aunque logren razonar formalmente eso no les asegura la comprensión de los conceptos implicados; además esa comprensión se ve obstaculizada por la existencia de concepciones espontáneas muy persistentes, reacias al cambio y, por si esto fuera poco, decididamente contrarias a los conceptos que se les pretende enseñar; así, la simple exposición a esos conceptos no es suficiente para que los comprendan... pero tampoco pueden habitualmente descubrirlos por sí mismos; se hace necesario diseñar unidades didácticas que al tiempo que expongan los conceptos científicos básicos induzcan un aprendizaje activo en los alumnos...pero esas unidades no siempre tienen éxito... En definitiva, tal vez ese profesor pesimista pueda haber llegado a la conclusión de que la enseñanza de la ciencia no es ya contraintuitiva sino literalmente *contra natura* ...Y, sin embargo, nosotros pensamos que se puede enseñar ciencia a los adolescentes.

Si hemos recogido esta cita tan larga, es porque describe de manera brillante un escenario que, aunque representa el panorama de la enseñanza de las ciencias experimentales, se ajusta con precisión a lo que ocurre en el campo de la enseñanza de las matemáticas: el fracaso en esta disciplina se ha instituido como natural y cotidiano en nuestras aulas.

En esta misma revista se presentan dos artículos que reflexionan sobre la matemática y su enseñanza. El matemático Eugenio Hernández, desde una perspectiva empírica y de interventor en el quehacer matemático, analiza el método hipotético-deductivo *vs* el método de descubrimiento en relación al trabajo profesional de los matemáticos y las implicaciones que esta dicotomía puede tener para la enseñanza de la disciplina (por ejemplo, la necesidad de un aprendizaje sig-

tarbiya, nº 10. 1995. Págs. 41-53

nificativo de los conceptos). Por su parte, el psicólogo Antonio Corral, desde una perspectiva teórica y de observador del quehacer matemático, analiza las dos formas de conocimiento matemático, la intuición y la formalización, y propugna la necesidad de ir más allá de las operaciones lógico-formales para explicar la comprensión matemática de nuestros alumnos. A pesar de sus diferentes lenguajes, diferentes niveles de análisis y diferentes perspectivas epistemológicas, hay una importante convergencia en sus conclusiones: la matemática no debe presentarse como una ciencia totalmente cerrada; los alumnos deben construir, a su medida y con las naturales restricciones espacio-temporales, la matemática escolar bajo la influencia educativa del profesor y en interacción con sus compañeros.

Como complemento y encuadre de estos dos trabajos vamos a analizar en este artículo unas cuantas cuestiones en relación a la enseñanza de las matemáticas que aparecen sistemáticamente en la literatura: el problema del currículo matemático, el papel de de los profesores y el problema de su formación, el problema de los métodos y actividades de enseñanza-aprendizaje y el papel del ordenador en la enseñanza de las matemáticas. Además, si contemplamos el proceso de enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva multidisciplinar, donde convergen las aportaciones de diversas disciplinas científicas, conviene reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas en interacción con dos de estas disciplinas que consideramos relevantes y a las que se refieren Hernández y Corral: la epistemología y la psicología educativa. En lo que sigue, analizaremos brevemente cada una de estas cuestiones.

1. Revisión de cuestiones polémicas en la enseñanza de las matemáticas

1.1. El problema del currículo de matemáticas

Está claro que los alumnos de secundaria han de recibir una educación matemática pero no se les puede enseñar todas las teorías matemáticas, por tanto hay que seleccionar y secuenciar contenidos: éste es el problema del currículo. Esta selección se puede hacer desde tres perspectivas o con tres criterios, no siempre compatibles: epistemológico, psicológico y sociológico. El currículo tradicional descansa en la disciplina académica mientras que las necesidades de la sociedad y la psicología se ajustan mejor a otros enfoques curriculares. Lo que más influye en el diseño curricular es la tradición (lo que siempre se enseñó) y el conocimiento del profesor; en cambio, la motivación del estudiante es un punto crucial en la construcción curricular que se ignora con demasiada frecuencia.

La mayoría de los profesores consideran que las matemáticas escolares y el currículo están estrictamente fijados y jerárquicamente organizados, de acuerdo al carácter unificado de las matemáticas y a su estructura lógica. Desde tal perspectiva, diseñan sus actividades de clase según la estructura de su propio conocimiento matemático y presentan las matemáticas a los alumnos como un objeto ya hecho y de una manera simplificada.

Sin embargo, las fuentes de los *currícula* no pueden descansar exclusivamente en la disciplina misma porque la disciplina como una teoría cerrada se organiza según criterios lógicos que no cubren el amplio espectro de relaciones que estaban activas en la fase de emergencia de la disciplina. Hay que centrarse en ideas que sean intuitivamente accesibles para que los pasos de formalización sean razonables y no se restrinja la enseñanza sólo a conexiones lógicas. Hay que utilizar medios de representación que sean más fáciles de comprender y hay que integrar la discusión sobre posibles concepciones erróneas de las teorías lo cual se puede hacer mediante la discusión en clase de paradojas y falacias que surgieron en el desarrollo histórico de las teorías matemáticas. Los principios básicos del diseño curricular deben ser: la propia disciplina, los intereses de los estudiantes, sus prerrequisitos matemáticos, la conexión con sus propias ideas previas y la transferencia de conocimientos, desde dentro hacia fuera del aula y viceversa.

I.2. El papel de los profesores y el problema de su formación

Beyth-Marom y Dekel (1983) crearon y experimentaron un currículo entero dirigido a mejorar el razonamiento probabilístico. Uno de sus hallazgos fue que los profesores que enseñaban con ellos el nuevo currículo, tenían dificultades en comprender algunos de los conceptos. Roseberry y Rubin (1989) también han escrito sobre el problema de las concepciones erróneas de los profesores cuando se intenta una intervención instruccional innovadora. Estos investigadores encontraron que el conocimiento previo de estadística de los profesores no estaba estructurado para facilitar el razonamiento y consistía en simples fórmulas. Los problemas encontrados en ambas investigaciones alertan sobre la importancia del profesor en cualquier innovación curricular que se proponga superar las concepciones erróneas de los estudiantes; tenemos que tratar primero las ideas erróneas de los profesores si pretendemos que sean competentes en la enseñanza que imparten, dirigida muchas veces a superar los conceptos erróneos de sus alumnos (Thompson, 1989).

Por otro lado, los intentos de introducir nuevos temas en la instrucción matemática y de hacer sugerencias concretas para la aplicación en el aula son frecuentemente sesgados en relación al papel del profesor. Por encima de todo, el profesor es considerado como un comunicador del conocimiento matemático. Esto lleva a un esfuerzo de suministrar los nuevos materiales de una forma detallada y *pret-a-porter* para asegurar que se pueden integrar en la enseñanza inmediatamente. Con demasiada frecuencia, tanto los investigadores como los profesores trabajan en base de esta comprensión limitada. Los profesores implícitamente esperan actividades de perfeccionamiento y formación para utilizar inmediatamente el material mientras esta actitud induce a los educadores e investigadores a desarrollar sugerencias que se puedan aplicar directamente en el aula.

A nuestro juicio, la alternativa de preparar material de enseñanza perfectamente estructurado y finalizado sin intervención del profesor de aula, no es una buena alternativa. Los problemas de comprensión de los estudiantes requieren una intervención activa del profesor y ajustes constantes de los materiales de enseñanza. El profesor debe intervenir activamente en este proceso ya que debe conformarlo, modificarlo, organizarlo y evaluarlo. Los problemas con el material *pret-a-porter* han animado a los profesores más motivados a desarrollar su propio material. Este papel del profesor también se promovió desde la perspectiva del aprendizaje escolar en función del desarrollo cognitivo. Esta concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje ve al profesor como un decisor activo y organizador de las actividades de clase ya que es él quien está familiarizado con el conocimiento previo y las habilidades de sus alumnos y las condiciones en el aula. Es tremendamente atractiva y útil la tarea de que cada profesor intente desarrollar sus propios materiales didácticos pero pensamos que es poco realista esperar que muchos profesores desarrollen materiales completos independientemente unos de otros.

Ambas visiones extremas del papel del profesor no mejoran la enseñanza: ni es el profesor un mero transmisor de la materia enseñada ni es sensato considerar a todo profesor individual como un diseñador de currículo. Las demandas y necesidades de la enseñanza en el aula se deben tomar en consideración cuando se desarrollan materiales y actividades educativas y ello implica que no es posible hacer sugerencias de enseñanza que ignoren al profesor. Esta idea es la que ha guiado nuestra propuesta de organización semi-elaborada de materiales y de preparación de profesores que iban a intervenir en el diseño y experimentación de una metodología de instrucción para la teoría de probabilidades basada en un modelo de cambio conceptual (Sáenz, 1995).

I.3. El problema de los métodos y actividades de enseñanza-aprendizaje

La enseñanza tradicional está gobernada por la idea de que el conocimiento matemático se puede adquirir de un modo lineal. Esto significa que el profesor debe definir inicialmente conceptos básicos para poder introducir gradualmente los demás elementos de conocimiento en su estructura. Se requieren fundamentos fijos y claros conceptualmente para asegurar el aprendizaje del conocimiento matemático. La fundamentación axiomática contiene, en principio, todo este conocimiento que sólo tiene que presentarse de modo aditivo. Dos estrategias de enseñanza se ajustan a este enfoque tradicional: la concreta-ingenua y el enfoque lógico, en términos de Kapadia y Borovcnik (1991).

En la enseñanza concreta-ingenua, el profesor se orienta sobre todo a cultivar la intuición, a hacer la materia concreta y a ilustrarla por medio de ejemplos. La intención es presentar la materia al alumno subdividida en pequeños segmentos de infomación y de modo que se pueda representar concretamente. Este metodo de enseñanza se practica principalmente en la primaria y a comienzos de la secundaria.

Dentro de la enseñanza secundaria se desarrolla otro método de enseñanza, lógico o estructural, que enfatiza las conexiones matemáticas consistentes. El modo de justificar y organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje consiste en supeditarlo a la estructura interna del currículo matemático que está organizado de una manera consistente. Esta concepción didáctica no implica que la estructura lógica de las matemáticas se presente inmediatamente para ser aprendida sino que el foco y orientación de la enseñanza consiste en hacer explícita esta estructura. Este método educativo se caracteriza por el carácter dominante del patrón pregunta y respuesta en la enseñanza directa, la ausencia de trabajo experimental y práctico y también por el patrón de enseñanza de «los tres pasos» (presentar ejemplos, desarrollar reglas o técnicas matemáticas para los cálculos y por último practicar esas reglas por medio de más problemas o aplicaciones) (Dörfler, 1984; Dörfler y McLone, 1986). Las consecuencias de este enfoque estructural en la enseñanza son: 1) la tendencia a proporcionar un montón de definiciones (y sólo unos pocos teoremas y de éstos algunos triviales) lo cual mata la motivación; 2) la tendencia a definir cosas que sistemáticamente no se usan; 3) la obsesión de utilizar tantos términos específicos de la disciplina como sea posible; y 4) el interés para conseguir formulaciones definitivas, irrecusables desde el principio.

A pesar de esas diferentes perspectivas en los dos tipos básicos de enseñanza tradicional, ambos parten de la idea de que el conocimiento matemático puede extenderse e integrarse gradualmente en la estructura global del currículum sumando pequeños elementos pieza a pieza. Por otro lado, ambos enfoques ocultan el significado completo de los conceptos matemáticos en cuanto que éstos ni son sólo una propiedad empírica ni son sólo una propiedad matemática sino la combinación de esos dos aspectos. Steinbring (1991) defiende esta tensión entre aspectos empíricos y teóricos y la no reductibilidad a uno de ellos y afirma que cualquier intento de enseñar desde el principio una teoría matemática según su estructura axiomática, lleva a una circularidad. Ilustra esta afirmación con el análisis de las nociones básicas de probabilidad y aleatoriedad: para poder discutir sobre la aleatoriedad se debe tener previamente un concepto de probabilidad que a su vez exige el concepto de aleatoriedad.

Una palabra sobre las actividades de enseñanza-aprendizaje: la tarea matemática desempeña un importante papel tanto en la clase como en la comprensión del profesor de lo que es la práctica educativa matemática. Las tareas son las unidades más pequeñas de actividad de clase que permiten al profesor interrelacionar el contenido comunicativo-social de la instrucción con el contenido específico de la materia. Los profesores de matemáticas frecuentemente piensan y hablan sobre la enseñanza en términos de tareas; las tareas son, de alguna manera, sus conceptos. Sin embargo, utilizan esos conceptos pragmáticamente; esos conceptos están altamente entrecruzados con los requerimientos locales y pierden su significado sin este contexto. El uso apropiado de tareas requiere en principio mucha experiencia práctica y esto se puede observar en lo que se llama un buen profesor.

Las tareas matemáticas que tienen sentido no se presentan aisladas. Se conectan siempre a un contexto de un problema más amplio que comunica significado y coherencia en un cierto grado. En este sentido las tareas matemáticas serias son distintas de rompecabezas; no es una forma óptima de enseñanza ni la prescripción de numerosos ejercicios rutinarios ni una mezcla aleatoria de tareas vagamente ligadas entre sí. Steinbring (1991) desarrolla el concepto de sistema de tareas que está entre esos extremos.

Para que varias tareas individuales formen un sistema deben relacionarse a un objeto común aunque lo hagan desde diferentes perspectivas. Además, las tareas deben ser análogas entre sí; el concepto de analogía es de especial importancia para construir y describir sistemas de tarea. Pólya (1981) y Freudenthal (1973) aconsejan la búsqueda de problemas análogos como una estrategia para resolver problemas y explican que el elemento crucial de la analogía descansa en la similitud de ciertos tipos de relaciones. Dos estrategias importantes para construir tareas análogas son la de variar las constantes del problema y la de cambiar de modelo. Esas dos formas de analogía representan distintos tipos de requerimiento al alumno: las tareas de un sistema que son análogas porque consisten en un simple cambio de constantes, tienen el objetivo primario de desarrollar y consolidar destrezas; en el caso de un cambio de modelo entre tareas análogas, el énfasis se pone en aspectos de comprensión conceptual.

En definitiva, ante la dicotomía: variable lógica de la matemática *versus* variable psicológica del alumno, en la enseñanza tradicional se prima la primera variable y se descuida la segunda. En algunas propuestas de innovación de la enseñanza de las matemáticas, ocurre lo contrario: se focaliza exclusivamente el proceso de enseñanza en el alumno. Como veremos posteriormente, nosotros defendemos un enfoque instruccional que parte de una determinada consideración epistemológica de la matemática y propone una integración de la variable lógica y la variable psicológica en un proceso de cambio conceptual que tiene en cuenta las consideraciones que acabamos de realizar.

I.4. El papel de los ordenadores en la enseñanza

El significado de los conceptos matemáticos no sólo depende del nivel de la teoría y de su representación sino también de los medios de trabajar con ellos. Las herramientas para representar el conocimiento parecen tener un impacto considerable en la adquisición por los sujetos de este conocimiento. Claramente la llegada de los ordenadores marca un cambio significativo en estas herramientas y por tanto debe provocar algún cambio en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, tradicionalmente el número π se ha definido como la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro; en un contexto computacional π se puede definir como 4 veces la probabilidad de que un dardo impacte en una diana circular de radio 1 inscrita en un cuadrado y es muy sugerente diseñar una simulación por ordenador de la situación aleatoria implicada. Sin embargo, hasta hoy, son muy pocos los estudios sobre la influencia del ordenador en el aprendizaje y comprensión de las matemáticas. Parece que esta situación es temporal y según informa Shaughnessy (1992) hay gran actividad en el campo, de la que se esperan resultados a corto plazo.

Hay un acuerdo casi universal entre los investigadores que las simulaciones por ordenador, el trabajo con hojas de cálculo y la utilización de ordenadores para realizar análisis exploratorios de datos son direcciones que debería indagar la educación matemática. El ordenador nos permite investigar situaciones más reales que los ejercicios tradicionales de clase, los cuales se plantean tratando de evitar el salto que hay entre la complejidad de las situaciones reales y las limitadas destrezas computacionales de los estudiantes.

Ciertamente, los ordenadores han revolucionado las prácticas de análisis de datos y simulación. Un nuevo tipo de racionalidad se basa en la prueba por simulación. Los algoritmos iterativos o recursivos llevan a una representación de los problemas diferente a la que producen los modelos y fórmulas cerradas que eran tradicionales en la matemática. Los métodos gráficos y de visualización facilitan la representación de los modelos con diferentes niveles de abstracción ofreciendo la posibilidad de interacción. La programación implicada no es una mera herramienta técnica sino que es un instrumento para pensar. Todo esto puede llevar a una reestructuración de las matemáticas desde un punto de vista algorítmico (Papert, 1980).

Con todo, la literatura sobre la utilización de los ordenadores en la enseñanza de las matemáticas proporciona muchas sugerencias didácticas pero existe poca investigación empírica y evaluación de la utilidad de esas sugerencias. Esta investigación es absolutamente necesaria para conocer, por ejemplo, cómo se modifican las concepciones de los estudiantes cuando el proceso de enseñanza-aprendizaje se realiza en un entorno de ordenadores. O cómo se modifica el papel del profesor en un aula computarizada en la que el profesor ya no es el Oráculo de Delfos, de donde procede todo conocimiento, como lo era en el aula tradicional.

2. Epistemología y estilos de enseñanza

LA naturaleza del conocimiento matemático y la concepción que el profesor tiene de este conocimiento determinan el proceso de enseñanza en grado muy alto. Así, el enfoque educacional de simplificar la materia y explicarla consistentemente se identifica con la estructura lógica, hipotético-deductiva, de las matemáticas, tal como hemos tenido ocasión de analizar en el apartado anterior.

Nosotros pensamos que un enfoque epistemológico alternativo, como el que representa Lakatos (1981) que defiende la naturaleza cuasi-empírica de las teorías matemáticas, tiene profundas repercusiones educativas y puede suponer el marco teórico de una práctica educativa superadora de las deficiencias tradicionales de la enseñanza de las matemáticas. Analicemos brevemente este enfoque.

Según la ortodoxia del empirismo lógico, mientras que la ciencia es *a posteriori*, sustantiva y falible, la matemática es *a priori*, tautológica e infalible. Sin embargo Lakatos (1981) defiende una asimilación radical de la matemática a la ciencia y muestra que el empirismo e inductivismo matemático, no sólo respecto al origen y método de la matemática sino también respecto a su justificación, están más vivos y extendidos de lo que se pudiera pensar. Apoya sus argumentos en la autoridad de expertos contemporáneos en filosofía de la matemática: «Russell fue, probablemente, el primer lógico moderno que afirmó que la naturaleza de la matemática y de la lógica pudiera ser inductiva. Russell, que en 1901 había proclamado que el edificio de las verdades matemáticas se mantenía incomovible e inexpugnable..., en 1924 pensaba que la lógica y la matemática eran exactamente iguales que las ecuaciones de la electrodinámica de Maxwell: ambas cosas son aceptadas debido a la verdad observada de algunas de sus consecuencias lógicas» (p. 43). Según Mostowski (1953), la matemática sólo es una ciencia natural más y Kalmar (1967) afirma que «la consistencia de la mayor parte de nuestros sistemas formales es un hecho empírico... ¿Por qué no confesar que la matemática, al igual que otras ciencias, se basa finalmente sobre, y ha de ser contrastada en, la práctica?» (citados en Lakatos, 1981, p. 47).

La epistemología clásica ha modelado durante dos mil años su ideal de teoría, científica o matemática, sobre la concepción de la geometría euclídea. La teoría ideal es un sistema deductivo con una inyección de verdad indudable en la cúspide (una conjunción finita de axiomas), de modo que esa verdad, fluyendo desde la cúspide hacia abajo, a través de canales de inferencias válidas, seguros y preservadores de la verdad, inunda todo el sistema.

El teorema de Gödel (1981) sobre la incompletitud de los sistemas formales acabó con la vieja utopía axiomática. Se admitía, de modo implícito, que todas las ramas de la matemática se organizaban a partir de un conjunto de axiomas susceptibles de desarrollar sistemáticamente la infinita totalidad de proposiciones verdaderas suscitadas. El trabajo de Gödel demostró que esta suposición es insostenible. El método axiomático tiene limitaciones intrínsecas. La aritmética ordinaria de los números enteros no puede ser plenamente axiomatizada. Aún más: es imposible establecer la consistencia lógica interna de una amplia clase de sistemas deductivos a menos que se adopten principios tan complejos de razonamiento que su consistencia interna quede tan sujeta a la duda como la de los propios sistemas.

Históricamente, el que la ciencia, a pesar de los ingentes esfuerzos que se hicieron, no pudiera organizarse en **teorías euclídeas** supuso un gran golpe para el racionalismo ultra-optimista. Resultó que las teorías científicas estaban organizadas en sistemas deductivos donde la inyección crucial del valor de verdad se encontraba en la base, en un conjunto especial de teoremas. Pero la verdad no fluye hacia arriba. El flujo lógico importante en tales **teorías cuasi-empíricas** no es la transmisión de la verdad, sino más bien la transmisión de la falsedad, desde los teoremas especiales ubicados en la base (enunciados básicos) hacia arriba, hasta el conjunto de axiomas (hipótesis). Hay que aclarar que una teoría que es cuasi-empírica según Lakatos puede ser empírica o no-empírica en el sentido usual: es empírica sólo si sus teoremas básicos son enunciados espacio-temporales cuyos valores de verdad vienen determinados por el código vigente del científico experimental. De una teoría euclídea puede afirmarse que es verdadera; de una teoría cuasi-empírica, a lo sumo, que está bien corroborada, pero es siempre conjetural. Además, en una teoría euclídea los enunciados básicos verdaderos, que son los axiomas del sistema deductivo, prueban el resto del sistema; en una teoría cuasi-empírica los enunciados básicos verdaderos son explicados por el resto del sistema.

La metodología de una ciencia depende en gran medida de que dicha ciencia aspire a un ideal euclídeo o cuasi-empírico. La regla básica de una ciencia que adopte el primer objetivo es la búsqueda de axiomas autoevidentes, la metodología euclídea es antiespeculativa. La regla básica del segundo tipo de ciencia es la búsqueda de hipótesis imaginativas y audaces con una gran potencia explicativa y heurística; este tipo de ciencia invoca una proliferación de hipótesis alternativas para ser criticadas, la metodología cuasi-empírica es intrínsecamente especulativa.

La historia de las teorías cuasi-empíricas es una historia de arriesgadas especulaciones y de refutaciones dramáticas. Pero las nuevas teorías y las refutaciones espectaculares no se dan cada día en la vida de las teorías cuasi-empíricas. Existen períodos de estancamiento cuando una sola teoría domina la escena sin tener rivales o refutaciones reconocidas. Semejantes períodos hacen que muchos olviden la criticabilidad de los supuestos básicos. Teorías que parecían contraintuitivas o degeneradas al ser propuestas por primera vez, cobran autoridad. Se propagan ilusiones metodológicas extrañas: algunos imaginan que los axiomas mismos empiezan a resplandecer bajo la luz de la certeza euclídea, otros imaginan que los canales deductivos de la lógica elemental tienen el poder de retransmitir la verdad inductivamente desde los enunciados básicos hasta los axiomas existentes. El ejemplo clásico de período anormal en la vida de una teoría cuasi-empírica es el largo dominio de la mecánica y de la teoría de la gravedad newtonianas. El carácter paradójico e implausible de la teoría llegó a desesperar al mismo Newton, sin embargo, tiempo después, Kant pensaba que era autoevidente y otros filósofos de la ciencia creyeron que estaba probada inductivamente. El peligro principal de estos engaños radica en que ambos cambian el desafío y la aventura que supone trabajar en la atmósfera de la crítica permanente de las teorías cuasi-empíricas por el embotamiento y la pereza de una teoría euclídea o inductivista, en la que los axiomas están más o menos establecidos, y donde la crítica y las teorías rivales son reprimidas.

¿Acaso no es sugerente la propuesta lakatosiana que acabamos de resumir, como base de una epistemología escolar que enmarque la adquisición de conocimiento matemático por el alumno como un proceso de pruebas y refutaciones en el que predomine el aspecto de descubrimiento sobre el aspecto de justificación que hay en la ciencia matemática? Nosotros hemos utilizado el enfoque de Lakatos en nuestra propuesta didáctica para la teoría de probabilidades, antes citada (Sáenz, 1995).

3. Teorías cognitivas y estilos de enseñanza

LA investigación psicológica ha estudiado desde diversas perspectivas los procesos cognitivos en la comprensión y aplicación de los conceptos y leyes científicas y nos parece que sus hallazgos tienen implicaciones interesantes para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Pozo, Gómez Crespo, Limón y Sanz (1991) afirman que ha habido en las últimas décadas dos formas fundamentales de investigar la comprensión de la ciencia por los alumnos, que han tenido una gran influencia en los desarrollos curriculares en el área científica. Se trata por un lado de la teoría piagetiana de las **operaciones formales** (Inhelder y Piaget, 1955) que analiza en este mismo número, con gran finura intelectual, el profesor Antonio Corral en relación a la enseñanza de las matemáticas; por otro lado se trata del más reciente enfoque de las **concepciones alternativas** de los alumnos sobre los fenómenos científicos (Driver, Guesne y Tiberghien, 1985).

Otro enfoque que nos parece muy sugerente es el basado en la **interacción entre intuiciones y matemáticas** de Fischbein (1987). Este enfoque comparte con la perspectiva de las concepciones alternativas dos ideas esenciales, a saber:

a) Los alumnos tienen ideas intuitivas sobre los fenómenos científicos, previas a cualquier enseñanza científica; estas ideas previas (intuiciones primarias, para Fischbein) tienen su origen en la experiencia cotidiana de los alumnos y por tanto gozan de un cierto valor predictivo, lo que las hace funcionales y persistentes en la estructura cognitiva humana.

b) Ahora bien, algunas de estas preconcepciones o intuiciones se hallan bastante alejadas del conocimiento científico y entran en contradicción con él, llevando al alumno a errores sistemáticos. Es por ello que enseñar ciencia no es un proceso simple que consiste en mostrar las teorías científicas para que los alumnos las aprendan, ignorando sus concepciones alternativas y primarias, sino que es un proceso complejo que consiste en conseguir que los alumnos modifiquen o sustituyan sus ideas intuitivas, pero firmemente arraigadas, sobre los fenómenos naturales por otros conceptos más avanzados y más próximos a las teorías científicas admitidas; es decir, el objetivo de la instrucción debe ser conseguir un revolucionario (en el sentido de Kuhn, 1970) **cambio conceptual**. Para lograr este avance o cambio conceptual de los alumnos es necesario conectar la ciencia con sus concepciones espontáneas y con las experiencias cotidianas en la que éstas se basan, a partir del reconocimiento del carácter constructivo del aprendizaje.

De las distintas teorías que acabamos de enunciar se siguen distintas estrategias didácticas. La metodología más común es la **transmisión expositiva** en sus distintas formas (clase magistral, libro de texto convencional, etc.); esta metodología ignora las ideas previas de los estudiantes y basa la enseñanza únicamente en la propia estructura de la materia. La idea que subyace a este planteamiento es que si la estructura de un contenido, por ejemplo análisis, se presenta de un modo bien organizado en términos de relaciones formales entre los conceptos científicos, esto permitirá que los alumnos desarrollen esta estructura conceptual por sí mismos. Hay que advertir sobre los problemas inherentes a este enfoque: las ideas previas pueden persistir a lo largo del nivel universitario a pesar de dicha instrucción; se puede producir una compartimentación del pensamiento de los estudiantes, el conocimiento escolar está separado del conocimiento cotidiano y solamente se usa para contestar problemas «escolares» o preguntas de examen.

La estrategia didáctica que se deriva de la concepción piagetiana tiene como objetivo el facilitar al alumno el dominio del método científico y no tanto el de proporcionarle los contenidos de la ciencia; es una estrategia de **enseñanza por descubrimiento** y no una transmisión verbal de conceptos científicos, que no sólo es ineficaz sino contraproducente. En lugar de enseñar al alumno uno a uno los conceptos científicos, es más eficaz proporcionarle la capacidad de descubrirlos o construirlos por sí mismos.

Desde el marco teórico de las concepciones alternativas se cuestiona la enseñanza por descubrimiento ya que no parece posible que los alumnos generen o inventen en contextos de instrucción, por muy adecuados que sean, los conceptos científicos básicos. El alumno, por sí sólo, a lo más que accede es a unas concepciones que se hallan bastante alejadas del conocimiento científico que se le intenta transmitir y que, de hecho, obstaculizan seriamente su adquisición. Es decir, no se cuestiona la capacidad de los estudiantes para investigar por sí mismos y extraer inferencias de sus observaciones, sino que se afirma que los estudiantes no «descubren» necesariamente lo que se pretende e incluso, en muchos casos, usan la evidencia empírica para reforzar sus nociones previas más que para estimular el cambio. Desde estas posiciones se postula que, para que se produzca el cambio conceptual, es preciso que el alumno reciba aquellas teorías científicas que no sea capaz de descubrir por sí mismo. Ahora bien, para que esa enseñanza receptiva sea eficaz ha de alejarse radicalmente de la vieja enseñanza repetitiva tradicional que conduce a un aprendizaje memorístico y no significativo, manteniéndose dentro de **posiciones constructivistas** y acompañándose siempre de ejercicios de descubrimiento y consolidación de los conceptos adquiridos (Ausubel, Novak y Hanesian, 1978).

4. Conclusiones

COMO se deduce de todo lo dicho hasta aquí, la enseñanza de la matemática es un problema pendiente de resolver porque su solución no es fácil. No hubiera sido necesario un análisis como el realizado a lo largo del artículo para llegar a una afirmación tan obvia como la que acabamos de formular pero es que, gracias a este análisis, sabemos un poco más acerca del problema de la enseñanza de las matemáticas. Por supuesto que no hemos encontrado el «camino real» que conduce a la solución y es posible que este camino ni siquiera exista pero del análisis realizado emerge, sobre todo, una idea que consideramos interesante explorar: la idea de la **integración multiteórica y multidisciplinar**.

Desde la perspectiva psicológica, parece factible integrar las tres tradiciones teóricas citadas en el apartado anterior (teoría piagetiana, la teoría sobre la intuición de Fischbein y el enfoque de las concepciones alternativas), no en el terreno de la ciencia cognitiva, donde no es posible o por lo menos supera con mucho la pretensión de este trabajo, sino en el terreno de las estrategias didácticas que es el campo de aplicación e integración, el «banco de pruebas» tradicional, de las teorías psicológicas del aprendizaje.

Desde la perspectiva epistemológica, la propuesta de Lakatos (1981) que revisamos en el apartado 2, nos parece muy sugerente y consistente pero, al no ser una teoría del aprendizaje, no contiene una reflexión explícita sobre los procesos cognitivos que se producen en la comprensión y adquisición de la ciencia matemática por los estudiantes.

¿Funcionará un método de instrucción que se base en la interrelación explícita de una componente epistemológica y una componente cognitiva? ¿Que integre la perspectiva de la disciplina a aprender (epistemología) y la perspectiva del alumno que aprende (psicología)? Un método de instrucción diseñado con esta característica, debe reflejar las implicaciones didácticas que se derivan de la reflexión histórico-epistemológica sobre las teorías matemáticas, de la revisión de los paradigmas psicológicos más relevantes sobre el pensamiento matemático y del análisis de investigaciones empíricas sobre comprensión matemática de los adolescentes realizadas desde una perspectiva didáctica. Resumimos en la tabla siguiente dichas implicaciones para la enseñanza de la matemática en el nivel secundario.

PERSPECTIVA DE ANÁLISIS	IMPLICACIONES DIDÁCTICAS ASPECTOS A TENER EN CUENTA EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE
histórico-epistemológica	• las paradojas y falacias en el desarrollo histórico de las teorías matemáticas
psicológica	• la concepción de la tarea matemática • la concepción del sujeto • la concepción de la relación sujeto-tarea
didáctica	• la naturaleza contingente y constructiva del pensamiento matemático • el sistema de ideas personales en coexistencia (no siempre pacífica) con el sistema formal de las teorías matemáticas • la epistemología de la matemática en el aula • las teorías cognitivas del aprendizaje y su influencia en los estilos de enseñanza

REFERENCIAS

AUSUBEL, D.P., NOVAK, J.D. Y HANESIAN, H. (1978). *Educational psychology. A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart y Winston. Versión castellana: *Psicología educativa*. México: Trillas, 1983.

BEYTH-MAROM, R. Y DEKEL, S. (1983). A curriculum to improve thinking under uncertainity. *Instructional Science, 12*, 67-72.

DÖRFLER, W. (1984). Actions as a means for acquiring mathematical concepts. En *Proc. Eighth Intern. Conf. for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 172-180). Sydney.

DÖRFLER, W. Y MCLONE, R. R. (1986). Mathematics as a school subject. En B. Christiansen, A.G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 49-97). Dordrecht: Reidel.

DRIVER, R., GUESNE, E. Y TIBERGHIEN, A. (1985). *Childrens ideas in science*. Milton Keynes: Open University Press: Trad. castellana de P. Manzano: *Ideas científicas en la infancia y la adolescencia.* Madrid: Morata/MEC, 1989.

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Reidel.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

GÖDEL, K. (1981). Sobre sentencias formalmente indecidibles de «Principia Mathematica» y sistemas afines. *Obras Completas.* Madrid: Alianza. (Original de 1931).

INHELDER, B. Y PIAGET, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent. Essai sur la construction des structures operatoires formelles*. París: P.U.F. Trad. castellana de M.T. Cevasco: *De la lógica del niño a la del adolescente.* Buenos Aires: Paidós, 1972.

KAPADIA, R. Y BOROVCNIK, M. (1991). The Educational perspective. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.). *Chance encounters: probability in education,* (pp. 1-26). Amsterdam: Kluwer.

KUHN, S. T. (1970). *The structure of scientific revolutions*, Chicago: The University of Chicago Press.

LAKATOS, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza Universidad.

PAPERT, S. L. (1980). *Mind-Storms. Children, computers and powerful ideas.* New York: Basic Books, Inc.

PÓLYA, G. (1981). *Mathematical discovery.* Nueva York: Wiley.

POZO, J. I. (1987). ...Y, sin embargo, se puede enseñar ciencia. *Infancia y Aprendizaje, 38*, 109-113.

POZO, J. I., GÓMEZ CRESPO, M. A., LIMÓN, M. Y SANZ SERRANO, A. (1991). *Procesos cognitivos en la comprensión de la ciencia: las ideas de los adolescentes sobre la química*. Madrid: CIDE.

ROSEBERY, A. S. Y RUBIN, A. (1989). Reasoning under uncertaintly: developing statistical reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 8*, 205-219.

SÁENZ, C. (1995). *Intuición y matemática en el razonamiento y aprendizaje probabilístico.* U.A.M. (Tesis doctoral no publicada).

SHAUGHNESSY, J. M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research* *on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: McMillan Publishing.

STEINBRING, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. En R. Kapadia y M. Borovcnick (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 135-167). Amsterdam: Kluwer.

THOMPSON, A. G. (1989). Learning to teach mathematical problem solving: Changes in teachers' conceptions and beliefs. En R. Charles y E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 232-243). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Resumen

La enseñanza de las matemáticas es un problema pendiente y polémico. Se analizan en este artículo unas cuantas cuestiones que son sometidas a debate de manera sistemática y continua en la literatura relativa a la educación matemática: el problema del currículo matemático, el papel de de los profesores y el problema de su formación, el problema de los métodos y actividades de enseñanza-aprendizaje y el papel del ordenador en la enseñanza de las matemáticas. Además, contemplando el proceso de enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva multidisciplinar, donde convergen las aportaciones de diversas disciplinas científicas, se reflexiona sobre la enseñanza de las matemáticas en interacción con dos de estas disciplinas que se consideran relevantes: la epistemología y la psicología educativa.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, métodos, epistemología, psicología.

Abstract

The teaching of Mathematics is an unsolved and controversial issue. In this article some topics are analyzed which are sistematically questioned in different publications about the teaching of Mathematics such as the programmes of study, the role of teachers and their training, the different methods and the teaching-learning activities, and the role of computers. This article also tries to make readers think about the teaching of Mathematics and its relation with two other disciplines which are considered relevant: epistemology and educational psichology. This relationship is so considered because the teaching-learning process is regarded from a multidiscipline perspective where other scientific disciplines influence the teaching of Matematics.

Key words: Teaching of mathematics, methods, epistemology, psichology.

César Sáenz de Castro
Instituto de Ciencias de la Educación
Universidad Autónoma de Madrid
Ciudad Universitaria de Cantoblanco
28049 Madrid