# Métodos y contenidos de la enseñanza de la matemática en la Universidad

Eugenio Hernández

HACE más de 2.000 años que Euclides escribió un libro titulado Los Elementos. Hoy se piensa que la mayor parte de los contenidos del libro no son producto del trabajo del autor, sino recopilación de resultados que los pensadores de su época y de épocas anteriores habían ido descubriendo. Tenía, sin embargo, una organización que serviría de modelo a la enseñanza en los siglos venideros. A partir de unos cuantos axiomas, o verdades evidentes que todos aceptarían como válidas, construye toda la geometría que con el tiempo comenzaría a llamarse Euclídea. Geometría en la que aparecen intrincadas relaciones entre los ángulos de un triángulo, las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, y otros muchos elementos geométricos.

Con el descubrimiento de la fórmula para encontrar las raíces de una ecuación de grado tres, producto de los pensadores del Renacimiento Italiano, la civilización europea supera por primera vez los hallazgos de las civilizaciones antiguas. Pero los elementos de Euclides siguieron siendo el libro a imitar cuando se trataba de trasmitir conocimientos.

En el siglo XVII la humanidad encuentra otras formas de representar la naturaleza. La poderosa herramienta matemática del cálculo de derivadas, desarrollada por Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, permitía resolver problemas acerca del movimiento de los cuerpos celestes, para producir resultados que maravillarían a sus contemporáneos.

Dos siglos fueron necesarios para que las herramientas matemáticas desarrolladas por Newton y Leibniz fueran descritas con el rigor que hoy caracteriza a las exposiciones de la matemática de nuestros días. Los esfuerzos de Weierstrass, Bolzano y principalmente Cauchy (nuestros estudiantes le recuerdan desde el primer curso por su rigurosa definición de límite con el uso de epsilons y deltas), consiguieron poner claros los conceptos que subyacían al cálculo infinitesimal. Sólo cuando todo el edificio matemático referido a este área estuvo bien estructurado, y los maravillosos resultados de sus descubridores podían deducirse a través de un razonamiento lógico a partir de ciertas definiciones sobre objetos elementales se comenzó a enseñar esta herramienta en los últimos años de las Escuelas Politécnicas francesas: era enseñar el análisis con el mismo estilo que Euclides había escrito sus Elementos.

Esta «euclideanización» de la enseñanza de la matemática en las universidades puede observarse en muchas de sus ramas. El grupo Bourbaki es el exponente más claro de esta tendencia: durante varios años, un conjunto de matemáticos franceses, que firmaban bajo el seudónimo antes mencionado, se aplicaron a la tarea de escribir los Elementos modernos, un compendio de toda la matemática conocida deducida a partir de unos axiomas evidentes y unas definiciones legibles.

Su inacabada obra tuvo gran influencia en la enseñanza de la matemática en varios países europeos, entre ellos España, durante los años 50, 60 y 70 de este siglo. Pero aún hoy día, liberados ya de la influencia de Bourbaki, la forma de exponer en libros y de repetir en las clases una rama interesante de la matemática sigue el método trazado para Euclides y seguido por Bourbaki. La Topología se enseña demostrando resultados a partir de las definiciones de los conceptos de espacio topológico y de función continua entre ellos; la teoría de grupos es una rama de la matemática en la que todos los resultados se demuestran a partir de unas cuantas definiciones; y esto son sólo algunos ejemplos.

## El método lógico-deductivo

MÁS de dos mil años de práctica y la constatación de que enseñando con este método los discípulos han sido capaces de superar a sus maestros para construir el imponente edificio matemática actual, avalan este método de enseñanza.

En esta forma de transmitir el conocimiento unos cuantos axiomas y unas cuantas definiciones son suficientes para comprender a partir de ellas y de conocimientos anteriores toda una teoría dentro de la matemática. Expuesta de esta manera, la matemática puede ser aprendida por cualquier: se necesitará más o menos tiempo, pero al final toda persona debe ser capaz de entender cualquier resultado matemático. Es sin duda un método que, quizá con mayor dedicación en unos casos que en otros, tiene que ser eficaz para cualquiera de nuestros estudiantes, máxime cuando éstos han superado con éxito varios años de matemáticas en la escuela secundaria.

Si esta exposición lógico-deductiva se ve aderezada con numerosos ejemplos, y el profesor expone algunas de sus más significativas aplicaciones, estamos ante una forma de enseñar que, en teoría, debería producir un alto grado de satisfación en el aprendizaje, si bien en algunos casos se necesita un mayor esfuerzo que en otros. En este método, la realización de problemas por parte del estudiante no es más que la comprobación de que se han comprendido los conceptos y los resultados que se han expuesto.

## Prestar atención a los conceptos

SIN embargo, estamos acostumbrados a que un gran porcentaje de los estudiantes matriculados en una asignatura de matemáticas no son capaces de superar el examen final. Y esto sucede con las mismas personas que son capaces de pensar durante varias horas y diseñar claras estrategias para conseguir granar en el juego de mus, del que tanto uso hacen diariamente. Es muy común ver en los tablones de anuncios en los que aparecen las calificaciones de estas asignaturas solamente una relación de alumnos que han superado la asignatura, con lo que de ella no puede extraerse información sobre el número de estudiantes que no la ha superado.

Si esto es así es porque los porcentajes de aprobados no son demasiado prometedores: si asumimos que el ejercicio de evaluación estaba bien pensado de acuerdo con lo explicado durante el curso, hay que concluir que el método lógico deductivo no es en práctica la panacea que parece en teoría.

Puede suceder que el porcentaje de los que no han superado una asignatura coincida con el de los alumnos que necesitarían más tiempo para poder reproducir en su mente el edificio lógico que se les ha presentado. Si fuera así no estaríamos ante un fracaso de este método, sino más bien constataríamos que el tiempo que un estudiante le dedica a una asignatura no es suficiente esfuerzo para aprenderla, opinión bastante generalizada entre varios de nuestros colegas.

En mi opinión hay también otra razón, quizá más importante que la del esfuerzo y tiempo dedicado, que influye en que la exposición lógico-deductiva no conduzca a un aprendizaje satisfactorio: la casi nula insistencia en que se aprendan los conceptos y la importancia que se le da a la resolución de problemas rutinarios.

No puedo evitar poner ejemplos tomados de la experiencia diaria con mis estudiantes. Aproximadamente el 60% de los estudiantes evaluados hicieron el cálculo de la integral

$$\int_{-2}^{1} |x|\,dx$$

$$\int_{-2}^{1} |x|\,dx = \left[ \frac{|x|^2}{2} \right]_{-2}^{1} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2}$$

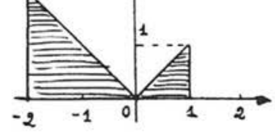



Figura 1

de la manera que se indica en la figura 1. Si, en lugar de haber aprendido memorísticamente las reglas de integración y aplicarlas en este caso sin preocuparse de que aparecía el valor absoluto, hubieran recapacitado que lo que se les pide es el área de los dos triángulos rayados en la figura 1, tendrían que haberse dado cuenta que el área no les puede salir negativa y para calcularla no hace falta una integral.

Cuando se les pide representar la función $f(x) = x + (1/x)$ todos nuestros alumnos comienzan a hacer derivadas; pero en este caso solamente hay que representar las funciones $x$ y $1/x$ y sumarlas mentalmente para obtener el gráfico sin necesidad de acordarse del cálculo infinitesimal, tal como se hace en la figura 2.

El razonamiento de la figura 3 muestra que en todo triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa coincide con la suma de las longitudes de los dos catetos. Cuando son preguntados por el error en esta demostración, difícilmente nuestros estudiantes saben contestar otra cosa que: ese resultado no es cierto porque es contrario al teorema de Pitágoras. Sólo alguno vislumbra que es erróneo porque no se aplica bien el concepto de límite.

El remedio pues al método de exposición lógico-deductivo está en un estudio pormenorizado de los conceptos e ideas que se introducen y en hacer mucho énfasis en ambos: dedicar tiempo a asegurarnos que nuestros estudiantes los han aprendido y comprendido y examinar cada nuevo resultado que se presenta a la luz de los conceptos e ideas originales y no sólo con el candil de las herramientas que éstos nos han permitido desarrollar.

Si encontráramos un método para hacer comprender claramente a nuestros estudiantes el significado de las definiciones y de los nuevos conceptos, el aprendizaje de todos los resultados de una teoría

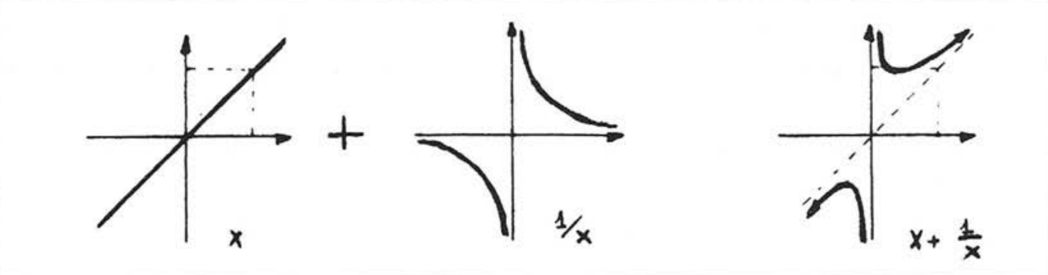
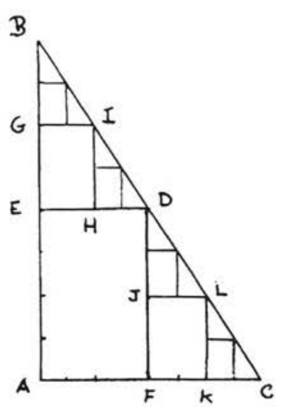



Figura 2




Esta es una demostración errónea de que en un triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es la suma de las longitudes de los dos catetos. Dividir la hipotenusa BC en dos partes iguales por medio del punto D y trazar los segmentos DE y DF paralelos a los catetos del triángulo. La longitud de la línea quebrada BEDFC coincide con la suma de las longitudes de los catetos. Hacer lo mismo con cada uno de los triángulos rectángulos BED y DFC, para obtener una poligonal BGIHDJLKC con la misma longitud que la suma de los catetos AB y AC.

El proceso se continúa numerosas veces de manera que la línea quebrada esté tan cerca de la hipotenusa como nos hayamos fijado de antemano. Entonces la longitud de BC debe ser igual a la longitud de la poligonal, que coincide con la suma de las longitudes de los catetos AB y AC.

Figura 3

sería una cuestión de tiempo, pero no existiría ningún impedimento para que cualquier persona pudiera realizarlo.

## Los procesos investigadores

PERO la forma en que la matemática se ha ido desarrolando no ha seguido el método lógico-deductivo: éste es el resultado final en el que se presenta una teoría cuando ya ha sido conveniente depurada y se quiere hacer inteligible a los demás. El desarrollo de la matemática sigue un movimiento browniano contrario totalmente a la tesis que ha mantenido la humanidad como ideal de enseñanza de la matemática que facilite el aprendizaje. Pero si los matemáticos aprenden y descubren nuevos resultados de esta manera, merece la pena intentar entender su forma de aprender e investigar para conocer los elementos adecuados que permitan reproducirla en un aula delante de estudiantes universitarios de licenciatura.

La primera fase del descubrimiento se centra en la internalización de un problema. A veces es un problema concreto y en otras ocasiones es algo que debe ir concretándose; en cualquier caso aparece aquí una fuerte relación del investigador con el problema que le produce la motivación necesaria para dedicar a su resolución grandes esfuerzos. No se trata de un simple ejercicio del que vislumbramos que puede resolverse fácilmente si aplicamos alguna de las técnicas matemáticas; debe ser una cuestión de la que inmediatamente nos demos cuenta que su resolución no es inmediata.

La segunda fase consiste en aplicar técnicas que ya conocemos para resolver el problema; hacer conjeturas acerca de su resolución e intentar demostrarlas, equivocarse varias veces y tener que volver atrás para repasar los procedimientos utilizados y descubrir los errores. Si esta fase produce la solución, tanto mejor.

Pero es muy frecuente que sea necesario consultar artículos ya existentes o preguntar a otros colegas. Estos pueden dar ideas directamente sobre la resolución del problema, o recordar publicaciones que contienen teorías que pueden ayudar a resolver la cuestión. Es ésta una fase, la tercera en esta ordenación que hemos realizado, en la que la actitud constante de preguntar y de conocer juega un papel que permitirá recoger el fruto maduro al final del proceso.

Después de un gran esfuerzo y numerosos vaivenes que obligan a comenzar de nuevo porque la línea que se seguía no ha podido solucionar el problema, aparece espontáneamente una idea que permite llegar hasta el fondo de la cuestión. Sin duda en esta fase han influido todos los conocimientos adquiridos, pero es difícil establecer a veces una relación directa entre éstos y la resolución del problema. La fase, que es la cuarta, finaliza cuando se han logrado encajar todas las piezas y se puede plasmar en papel un resultado que es entendible por cualquier otro matemático que trabaje en su misma área de conocimiento.

Es la anterior una descripción breve del proceso de descubrimiento, que en definitiva es también un proceso de aprendizaje.

## El aprendizaje por descubrimiento

LOS pasos anteriormente descritos acerca de la forma en que un matemático va descubriendo las fronteras de la ciencia pueden modelarse, con pequeñas modificaciones, cuando se trabaja con un grupo de estudiantes; éstos son personas que conocen la matemática hasta un cierto nivel y necesitan continuar ampliando las fronteras de su conocimiento.

Es necesario comenzar describiendo varios problemas, quizá sea mejor llamarlos proyectos, interesantes por su aplicación inmediata o por haber desempeñado a través de la historia una gran influencia en el desarrollo de las ideas centrales de la matemática. La descripción de los proyectos debería contener el menor número de fórmulas posibles; debe ser una descripción casi completamente lingüística de un problema, que es como se comienzan siempre describiendo los problemas más interesantes de la matemática.

Un ejemplo quizá sirva de aclaración. Intentar averiguar la forma en que debe ser construida una casa con una capacidad interior fija para que a través de sus paredes se pierda la menor energía posible puede ser uno de estos proyectos. Quien lo intente resolver podrá hacer experimentos calculando la energia que pierden casas con distintas formas y deberá acotar el problema del material que se utilizará. Necesitará resolver un problema de optimización, para el que sin duda podrá utilizar el cálculo de derivadas, pero también podrá hacer razonamientos geométricos y si quiere la solución completa tendrá que manejar el cálculo de integrales. Por cierto, que los esquimales habían resuelto este problema en la práctica mucho antes de que los matemáticos se ocuparan de él.

Es difícil creer que, por su cuenta, todos los estudiantes serán capaces de recorrer el camino histórico que ha seguido la humanidad para desarrollar todo el aparato matemático. Los estudiantes pueden trabajar individualmente o en grupos pequeños, pueden consultar bibliografía, bien sea la recomendada o la que libremente encuentren, y pueden hacer preguntas a su profesor.

Este último es el aspecto más delicado de este método de enseñanza. Cuando se nos hace alguna pregunta por parte de un estudiante, tendemos a explicarle la solución completa a su problema, con el objetivo de ahorrar tiempo, aun cuando está claro, por la expresión facial del estudiante, que no ha captado ni los detalles ni lo esencial de la solución. Haciendo esto estamos dirigiendo al estudiante en sus descubrimientos y privándole del aprendizaje que supone el haberse introducido por sendas inexploradas, aunque éstas no hayan conducido a la solución y hayamos tenido que retroceder al punto de partida.

En este momento, la forma deseable de actuación del profesor es «olvidarse» de que conoce la solución, o como diría P. Puig Adam: «El profesor debe saber mucho y debe saber callárselo». Pero hay que ser conscientes de que si ante el problema el estudiante está en un camino sin salida, la ayuda es necesaria. Bien sea en forma de sugerencia para que revise alguna bibliografía, o en forma de nueva pregunta, el estudiante debe salir de este intercambio de opiniones con la impresión de que tiene por delante una tarea inminente que realizar, cuya superación puede ser de gran ayuda para conseguir su objetivo final: encontrar una solución satisfactoria al problema.

Preguntas a algunos de sus compañeros, consultas bibliografías y preguntas al profesor son las actividades similares a la que realiza un matemático cuando revisa los artículos publicados o pregunta a sus colegas para buscar ideas para poder aplicar en su búsqueda de la solución correcta.

Llegado el momento en que el estudiante o el grupo que esté trabajando en el proyecto vislumbra la solución, es necesario recapitular; reflexionar sobre todos los pasos que se han dado, volverlos a repetir para asegurarnos de su validez. Desde luego, es tremendamente importante que se redacte una versión completa de la solución e incluso defenderla ante sus propios compañeros.

La descripción legible de la solución dada al proyecto planteado es muy importante, no sólo como forma de asegurarse que el razonamiento realizado es correcto, sino también porque sirve de práctica de la expresión matemática, de la que nuestros licenciados carecen en muchas ocasiones.

## Viabilidad

TODO el mundo pensará que es fácil rechazar la aplicación del método de aprendizaje por descubrimiento anteriormente expuesto, si se trata de implantarlo en las universidades españolas. La masificación de nuestras aulas, la inflexibilidad de los programas, las aptitudes que los estudiantes han desarrollado en la sociedad y en sus estudios y el entramado burocrático en el que la enseñanza tiene como fin la superación de hitos que conduzcan a un título, son algunos de los factores que impedirían la aplicación exitosa de este programa. Resumiendo, este método puede emplearse en un contexto social y educativo que puede parecer lejano al que ahora poseemos.

Pero imaginemos que el panorama fuera diferente. No hay masificación, nuestras clases solamente contienen dos docenas de estudiantes, podemos decidir libremente sobre nuestro programas, la sociedad no ha operado negativamente sobre las aptitudes de nuestros estudiantes y éstos no están preocupados por la consecución de hitos importantes, diferentes del relativo al aprendizaje. **¿Es posible que en estas condiciones se pueda lograr una enseñanza exitosa con el método de aprendizaje por descubrimiento?**

Ya hemos adelantado algunas ideas sobre una posible contestación a estas preguntas. El profesor tiende demasiado a ayudar al estudiante y a darle la solución correcta; aplica una ley de optimización: conseguir «más» con el menor tiempo posible. Consigue enseñarle como se resuelve el problema sin tener que recorrer vericuetos y caminos que no llevan a la solución final. Esta aptitud, totalmente subconsciente, impide el proceso creativo del estudiante. No es fácil encontrar la solución, aunque desde luego la mentalidad del profesor y su relación con los estudiantes debe cambiar si se pretende conseguir una enseñanza efectiva con el método de aprendizaje mediante descubrimiento.

El tiempo que se tarda en recorrer los caminos que ha seguido la historia en los descubrimientos matemáticos, aunque éstos sean ligeramente forzados por un guía eficaz, es un gran impedimento para aplicar este método en la sociedad actual. El coste social de tener al estudiante en la universidad hasta que haya recorrido gran parte de los descubrimientos de la humanidad es insoportable para la sociedad.

En la New México State University, algunos profesores trabajan desde hace varios años en la enseñanza del Cálculo con un método en el que los estudiantes realizan proyectos, que los corrigen sus profesores, que son muy similares a los descritos aquí. Es un método mixto, en el que también existen las clases tradicionales en las que el profesor explica los conceptos y los resultados importantes y a la vez se asignan proyectos. Las clases tradicionales que imparten no son tan densas como las que se imparten en las universidades españolas y no contienen demasiado cálculo; los proyectos exigen trabajo adicional de los estudiantes y de los profesores.

Unos 500 estudiantes seguían este método en 1991 y a juzgar por la evaluación que ellos mismos hicieron del programa, que está descrita en «Student Research Projects in Calculus» (M. Cohen, E. Caughan, A. Knoebel, D. Kurtz y D. Pengelley, The Mathematical Association of America, 1991), con un éxito de aprendizaje y grado de satisfación elevado. A pesar de las dificultades, quizá sea posible aplicar este método con éxito en las universidades españolas.

## Acerca de los contenidos

A través de la exposición realizada, hemos mencionado algunas cosas que creemos importantes acerca de la enseñanza de la matemática. Hay una idea recurrente en los razonamientos anteriores y es la necesidad de reforzar la forma de enseñar los conceptos importantes, sin prestar tanta atención a los ejemplos calculísticos. Hemos alcanzado una época en la que esto es posible hacerlo a nivel universitario.

Ya lo presentía Wallace Given en 1966:

«Hay un hecho simple y básico acerca de

> los ordenadores que, en las décadas y siglos venideros, afectará no sólo a los acontecimientos de matemáticas sino a lo que se creerá que es importante en ellas».

Nuestros estudiantes pueden disponer de calculadoras con capacidad para realizar gráficas y que realizan cálculo simbólico, pueden acceder a ordenadores personales (propios o en lugares comunitarios) con programas que calculan integrales y determinantes de matrices de orden diez en segundos, y no mencionamos otras cosas más sofisticadas. Hay intentos de realizar sistemas expertos que puedan hacer demostraciones lógicas a partir de unos axiomas, y algunos ya están preparados para superar con un aprobado un examen de cálculo elemental de una variable en el que se pida resolver algunos problemas.

¿Es necesario enseñar los métodos de integración y disponer de una tabla en la que poder consultar integrales? ¿O tendremos que abandonarlos igual que ya hemos abandonado las tablas de logaritmos y la regla de cálculo en la enseñanza secundaria?

En cualquier caso, si las tareas rutinarias las realiza el ordenador, nosotros nos tenemos que dedicar a enseñar lo que el ordenador no hace: enseñar conceptos. Los cursos deben ser diseñados para conseguir esto, aunque ello exija un esfuerzo considerable.

El ordenador está haciendo populares partes de la matemática que estaban adormecidas. La matemática discreta, opuesta a la matemática del continuo, está cobrando un gran auge. La combinatoria, la teoría de números, la teoría de grafos, los estudios sobre la complejidad de los cálculos, la criptografía para enviar mensajes por las autopistas de la comunicación de manera segura, son aspectos que deberían aparecer en el currículum de las enseñanzas universitarias de matemáticas.

Los procesos de desarrollo del pensamiento espacial que generaba la geometría descriptiva debe volver a ocupar un sitio en la enseñanza de la matemática. Su estudio se encuentra hoy totalmente abandonado en los programas de matemáticas, en favor de una concepción de la geometría en la que se abusa de los sistemas de coordenadas.

Diseñar programas nuevos con más énfasis en los conceptos y en las ideas no es nada fácil. No se encuentra ni en los libros; en la página 73 del libro titulado «Die Genesis des Abstrakten Gruppenbegriffes» podemos leer con referencia al matemático E. Galois (1811-1832):

> «... en vano buscó en libros y en artículos las ideas importantes. Estaba convencido que el fallo en el énfasis de las ideas permitía que todo el corazón intelectual de un área fuera destruido por una maraña de teoremas».

Quizá ha llegado el momento de remediar algunas de las cosas que nuestros antepasados ya echaban en falta.

## Resumen

El método tradicional de enseñanza de las matemáticas que se basa en el carácter lógico-deductivo de la disciplina ha mostrado su eficacia (muchas generaciones de estudiantes han aprendido matemáticas siguiéndolo) pero también sus limitaciones (el fracaso escolar es grande en matemáticas). Se sugiere en este artículo que quizá hay que seguir en la enseñanza el propio método de trabajo que siguen los matemáticos profesionales. Esto conduce a un proceso de enseñanza-aprendizaje por descubrimiento dirigido, donde se concede fundamental importancia al aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos frente a la utilización rutinaria de fórmulas y algoritmos.

**Palabras clave:** Enseñanza de la Matemática, aprendizaje por descubrimiento, aprendizaje significativo, método.

## Abstract

The traditional method in the teaching of Mathematics which is based in the locical-deductive aspect of the subject, has shown its effectiveness (many generations of pupils have learnt Mathematics this way) but it has also shown its limitations (many pupils have had difficulty with this subject). This article suggests the idea that perhaps it would be convenient to follow the same method professional mathematicians use when working. This would lead to a learning-teaching process through guided discovery, where meaningful learning of mathematics takes the place of meaningless use of formulae.

**Key words:** Teaching Mathematics, learning through discovery, meaningful learning, method.

**Eugenio Hernández**
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid
Ciudad Universitaria de Cantoblanco
28049 MADRID