Más allá del pensamiento lógico-formal en la enseñanza de las matemáticas

Antonio Corral

Introducción

ESTÁ fuera de toda duda la trascendencia del pensamiento lógico-formal a la hora de enfrentarse con el estudio de las matemáticas, pero ello no nos debe hacer olvidar los aspectos no estrictamente lógico-formales que también contribuyen, a su modo y en su justo término, al progreso en el dominio del pensamiento matemático.

Voy a tratar de justificar la importancia de no desatender los aspectos intuitivos cuando se trata de explicar (los psicólogos), y, de fomentar (los educadores) el desarrollo del pensamiento más abstracto y avanzado.

Dividiré, para ello, la exposición en dos partes. En la primera, someteré a un duro examen epistemológico el intento de circunscribir el desarrollo intelectual durante la adolescencia (12-17 años), y aún después, a las llamadas operaciones lógico-formales. De esa forma intento mostrar no sólo sus posibilidades, sino también sus límites al caracterizar el desarrollo intelectual. En la segunda parte, primero, comentaré un modesto experimento sobre la intuición de infinito, que muestra que las consideraciones epistemológicas previamente realizadas no son del todo ociosas. Sólo se trata de ilustrar con un ejemplo la reflexión epistemológica primera, y, por supuesto, no de comprobar ninguna hipótesis general. En segundo lugar, y para terminar, propondré unas reflexiones de carácter teórico sobre las relaciones entre psicología y matemáticas.

Hay tres vertientes en el pensar: (a) la capacidad de resolver problemas; (b) la posibilidad de identificar (formular) problemas y (c) la propiedad del pensamiento de reflexionar sobre sí mismo. Todas ellas, de algún modo, deberán estar presentes en lo que sigue si no queremos simplificar la complejidad del pensamiento humano, en general, y la del matemático en particular.

Ahora bien, podría alguien preguntarse, si el matemático realiza notables progresos en su conocimiento de la realidad matemática, sin necesidad de conocer las leyes psicológicas que rigen sus procesos de conocimiento, ¿por qué investigar sobre su funcionamiento cognoscitivo? Si los matemáticos almacenan gran cantidad de conocimientos sobre sus distintas áreas de estudio sin «intentar comprender por qué una teoría matemática se desarrolló y tomó la forma que tomó», preocupándose simplemente del contenido que de hecho tiene, es decir, sin disponer apenas de «información histórica sobre sus orígenes o sobre las motivaciones que condujeron a su creación» (Grattan-Guinness, 1984), ¿para qué dedicar tiempo a la investigación histórica del desarrollo de la matemática?

No se crea que todo el mundo tiene una respuesta constructiva a estas preguntas. Por ello es preferible formularlas en voz alta, aun a riesgo de que a alguien le pueda parecer un ejercicio innecesario o superfluo.

Piaget y García han sabido vincular de un modo plausible (*Psicogénesis e historia de la ciencia*, 1982) el desarrollo intelectual individual y la historia de la ciencia desde la antigüedad griega hasta la constitución de la ciencia moderna, con particular atención a la geometría y al álgebra. Su estudio es una rica fuente de sugerencias didácticas, porque aclara los obstáculos epistemológicos con los que tuvo (y tiene) que enfrentarse el sujeto durante el proceso de construcción de estas disciplinas.

Por otra parte, sabemos que «el lenguaje no constituye la fuente de la lógica sino que está, al contrario, estructurado por ella» (Piaget e Inhelder, 1966, p. 94). El lenguaje permite, por supuesto, una codificación y un almacenamiento rápidos y eficaces, pero no conduce por sí mismo a una verdadera adquisición operacional. Es inútil, por tanto, centrar el proceso de enseñanza y aprendizaje en la mera transmisión oral de conocimientos, por muy bien estructurados que éstos estén. Se hace necesario, desde esta perspectiva, conocer la historia de las matemáticas, si queremos mejorar su enseñanza.

La teoría de las operaciones lógico-formales

MUCHO antes de escribir el libro de *Psicogénesis e historia de la ciencia*, Piaget había caracterizado el último estadio del desarrollo intelectual centrándose en la descripción de las operaciones lógico-formales. Podemos resumir, para los efectos de esta exposición, la teoría de Inhelder y Piaget (1955) en los siguientes tres puntos:

(a) es un intento de explicitar las operaciones lógico-matemáticas necesarias para acceder a las ciencias naturales y formales,

(b) es un modelo que pretende poder explicar cualquier comportamiento intelectual avanzado o significativo,

(c) ofrece una visión general del acceso al pensamiento científico.

El problema principal de la teoría de las operaciones lógico-formales es que desatiende los procesos de construcción de los conceptos teóricos que explican los resultados experimentales. Se centra fundamentalmente en los aspectos lógico-formales de la inteligencia y olvida los aspectos de la construcción (comprensión) conceptual. Todos los hechos se interpretan a la luz de alguna teoría y así se explica más claramente la existencia de teorías opuestas. Para N. R. Hanson (1977) «la cuestión es mostrar cómo los datos son moldeados por diferentes teorías o interpretaciones o construcciones intelectuales» (p. 79), por lo que se inclina a pensar que ya los propios datos de observación son distintos según los presupuestos teóricos de los que se parta. Estos aspectos son los que desatiende la teoría de las operaciones lógico-formales.

La teoría de las operaciones lógico-formales tiene, además, otro problema, el que plantea el teorema de Gödel de la incompletitud de los sistemas formales. ¿La teoría que explica el funcionamiento cognoscitivo del sujeto humano, en general, debería ser la misma que explica el funcionamiento del psicólogo que está elaborando la citada teoría? Las operaciones lógico-formales son operaciones de segundo orden, pero, ¿de qué orden son las operaciones que pone en acción el psicólogo cuando conceptualiza esas operaciones de segundo orden?

El pensamiento dialéctico

CONOCER es expresar las contradicciones múltiples y convivir con ellas, pues las realidades sustanciales suelen contener dos polos. La mayoría o sigue una línea o sigue otra. Casi nadie «convive» con las dos, dada la dificultad que entraña la construcción de síntesis dialécticas.

¿Es el pensamiento dialéctico una superación del pensamiento lógico-formal?, o, ¿es otra forma (paralela, no continuadora) de enfrentarse con ciertas realidades vitales?

El pensamiento dialéctico asume otra concepción del equilibrio distinta del pensamiento lógico-formal. Desde la perspectiva del primero, los sistemas raramente son cerrados. Por el contrario, están abiertos y cambian y se transforman continuamente a través del tiempo.

Adoptar un constructivismo dialéctico nos puede permitir integrar, o hacer complementarios, los distintos modos de conocer.

Hay dos modos de pensar paralelos que nunca se identifican o unifican. Coexisten, se complementan, interactúan: la intuición y la formalización. No hay una única modalidad de formalización: hay (potencialmente) distintos lenguajes formales. La formalización de intuiciones válidas se lleva a cabo mediante la búsqueda constante de lenguajes formales cada vez más flexibles, abiertos y potentes. El proceso es inacabable, al no poderse llegar a una intuición formalizada en sí misma. Ni a un formalismo que haga innecesaria la intuición.

Aquí estoy entendiendo la intuición en el sentido de «aprehensión» general o captación global de un concepto, noción, idea, situación, problema... No en el sentido de: (a) lo opuesto a riguroso, (b) imagen visual, (c) conjetura plausible, (d) demostración incompleta, (e) formulación que se apoya en un ejemplo destacado. Me refiero a la aprehensión de: las estructuras matemáticas subyacentes, las propiedades generales o esenciales (los principios) de alguna solución, las relaciones intrínsecas (estructuras básicas) de los problemas... «No es el descubrimiento en sí sino el *principio* lo que es importante para el aprendizaje significativo» (Resnick y Ford, 1990).

Desgraciadamente los sistemas educativos modernos tienen la perniciosa tendencia de presentar a los alumnos los contenidos matemáticos como productos acabados, hurtando de esa forma, a los alumnos, la posibilidad de captar su auténtica construcción, y, deformando, así, la verdadera naturaleza del progreso científico y de la construcción del saber. Los contenidos se ofrecen desconectados:

(a) de su propio devenir histórico, lo que impide una adecuada recapitulación individual;

(b) de los acontecimientos históricos a los que están vinculados —sociales, filosóficos, técnicos, científicos...—, y

(c) entre sí mismos, o por lo menos, interfiriendo su interconexión.

Hablemos de las máquinas

LA inteligencia artificial (IA) sólo puede aspirar a imitar el funcionamiento intelectual humano, nunca a igualarlo. Este tiene, como hemos visto, dos polos, por lo que el programa de ordenador sólo puede emular (y en algunos aspectos superar) a uno de los polos, concretamente el polo formalización. Difícilmente a la aprehensión intuitiva, y más difícilmente, todavía, a la interacción entre ambos.

En términos generales, sin atender a aspectos parciales o particulares, podemos aceptar que la mente humana no puede construir una mente artificial más inteligente que ella misma, entendiendo por tal el hecho de que la primera quede contenida en la segunda. La construcción de una mente artificial más inteligente que su creador encierra una contradicción en sus propios términos. Para hacerlo necesitaría, primero, concebirla, y, después, segundo, realizarla. El logro de cualquiera de ambos procesos supondría la equiparación efectiva entre creador y criatura. A lo sumo habría igualdad, nunca superioridad de lo generado.

¿Y, una mente semejante, sí? Tampoco, porque en ese mismo instante, el creador, ya habría devenido superior.

Por lo tanto, el computador no puede ser un modelo exacto y claro del funcionamiento cognoscitivo humano.

La inacabable evolución intelectual

EL mundo es abierto no sólo porque no sabemos qué cosas hay o puede haber en él, sino ante todo porque ninguna cosa por muy precisa y detalladamente que esté constituída, jamás es «la» realidad en cuanto tal (...) Inteligir es avanzar hacia... lo que no sabemos; y tal vez nunca sepamos qué puede ser la realidad. Por esto es por lo que la intelección no es un mero movimiento entre cosas sino una marcha hacia lo desconocido e incluso hacia el vacío. (Zubiri, 1983, pp. 20-21). Y esto es, si cabe, más cierto cuando se trata de las matemáticas.

El conocimiento matemático no avanza sólo resolviendo problemas; avanza, antes que nada, formulando problemas, delimitando ignorancias, señalando límites, definiendo imposibilidades...

N. R. Hanson reivindicaba —desde el punto de vista del alumno— la pertinencia educativa de formular preguntas de difícil, si no imposible, respuesta. Es más importante preguntar que utilizar fórmulas, obtener correctamente los números o hacer bien las transformaciones.

El progreso en el conocimiento de nuevas realidades matemáticas se produce por el surgimiento de contradicciones, desequilibrios y el posterior intento de darles respuesta. Si no hay conflicto no hay progreso intelectual.

La capacidad mental y la intuición de infinito

Estos dos modos de conocer a los que me estoy refiriendo se sustentan en dos modos claramente diferenciados de actuación cognitiva: el analítico y el holístico. (Ambos se hayarían vinculados al hemisferio izquierdo (HI) y derecho (HD), respectivamente). En general, podemos decir que las distintas tareas demandan preferentemente la activación de uno u otro hemisferio. Otras, en fin, la mayoría, requieren una cierta co-activación de ambos.

Las tareas de carácter analítico son las que más procesamiento del HI necesitan. Las tareas de carácter holístico son las que reclaman, preferentemente, el concurso del HD. Habría, finalmente, otras, de carácter dinámico o dialéctico para las que sería inevitable la construcción de resoluciones o síntesis inter-hemisféricas. Por supuesto eso no es óbice para que haya resoluciones o síntesis intra-hemisféricas, en particular del HI, como las que se producen cuando el sujeto resuelve una contradicción lógica. Probablemente, la superación de las contradicciones dialécticas, en cambio, se lleva a cabo mediante una feliz conexión interhemisférica.

Durante la adolescencia, ya lo hemos dicho, se contruyen las llamadas operaciones lógico-formales cuyo rasgo fundamental es la capacidad de pensar de un modo cada vez más abstracto.

Mientras que el pensamiento lógico-formal parece alcanzar cierta plenitud al final de la adolescencia (18 años), las llamadas operaciones dialécticas, que permiten una superior interacción entre lo concreto y lo abstracto, quizás, necesiten todavía más tiempo para su definitiva consolidación.

En un experimento que llevamos a cabo[1], se trataba de explorar la actuación de adolescentes en una tarea lógico-formal que contenía un aspecto global o intuitivo.

Dado que la capacidad (atención, energía) mental (M) puede tener cierta influencia en la actuación cognitiva, los sujetos respondieron a una prueba (FIT) que pretende medir el nivel (cuantitativo) de capacidad mental que han alcanzado. Es de esperar que la capacidad mental (M) influya más en los aspectos analíticos o cuantitativos, menos en los dinámicos, y, casi nada en los holísticos.

Los alumnos que participaron en el experimento fueron adolescentes de 15-16 años que cursaban el segundo curso de Formación Profesional. Los sujetos, como digo, debían responder a una tarea que medía su capacidad mental. Esta tarea ha sido ideada por Pascual-Leone en el marco más amplio de su teoría de los operadores constructivos. Se denomina FIT (test de la intersección de figuras).

La segunda tarea trataba de valorar la capacidad de los sujetos para realizar combinaciones:

Juan y Luis quieren que su equipo este año sea campeón, para eso les hace falta meter goles en este último partido de liga. Ellos saben que son los mejores y siempren ganan en el dos contra uno.

Ahora bien, mirando el dibujo...¿De cuántas formas posibles crees que pueden meter gol?

*		* portero
X		# Juan
O		# Luis
#	#	X Defensor
		O balón

En el FIT hay 36 problemas. Cada uno se compone de entre 2 y 8 figuras, que se muestran a la derecha separadas, y, a la izquierda, en intersección. Hay que encontrar el espacio común a todas las figuras. Según el nivel de respuesta alcanzado por el sujeto se le asigna una capacidad mental de 1, 2, 3, 4, 5, 6 ó 7. El 8 queda excluido.

Se hicieron tres grupos de sujetos según la puntuación alcanzada:

(a) Los de capacidad mental 5 en el que hay 5 sujetos.

(b) Los de capacidad mental 6 en el que hay 9 sujetos.

(b) Los de capacidad mental 7 en el que hay 7 sujetos.

Ha podido comprobarse en distintos experimentos, sobre todo en DeRibaupierre y Pascual-Leone (*Formal operations and M power: a neo-piagetian investigation*, 1979), que las tareas que implican operaciones lógico-formales de segundo orden tiene una demanda mental de 6 ó 7. Como era de esperar cuanto más complejas son las tareas más capacidad mental demandan.

1 La tarea experimental ha sido ideada por Sagrario Delvalle. Ella se encargó, también, de examinar a los sujetos.

En la tarea lógico-formal se tenía en cuenta dos aspectos:

(a) El número real de formas de meter gol, sin repetición, conseguidas, y

(b) El número posible de formas de meter gol que el sujeto piensa que de hecho puede haber, aunque él no las haya realizado. Si contestaba que había infinitas se le daba 1 punto; si contestaba que había indeterminadas, 0.5; y, si contestaba con un número preciso, 0.

A continuación presento los resultados del modo más sintético posible. En una tabla se consignan las puntuaciones medias obtenidas por cada grupo (GI, capacidad mental 5; GII, capacidad mental 6; GIII, capacidad mental 7) en cada aspecto de la tarea:

	Nº Combinaciones	Infinitas
GrupoI (M=5)	10.8	45%
Grupo II (M=6)	14	55.5%
Grupo III (M=7)	14.1	0%

Los resultados más sobresalientes pueden resumirse así:

(1) Los sujetos del grupo de menor capacidad mental realizan un menor número de combinaciones efectivas en la tarea que los otros dos grupos. Aunque la diferencia no es muy grande.

(2) Sin embargo, hay una diferencia notable entre los grupos GII y GIII, en la tarea lógico-formal en el porcentaje de respuestas «infinitas», y, a favor, contrariamente a lo esperado, del grupo de M = 6. ¿A qué se puede deber que los de menos capacidad mental puedan anticipar más rotundamente que los de la máxima capacidad mental una respuesta tan compleja, o, llegar más lejos en la comprensión de lo posible, una de las formas en las que se expresa la creciente capacidad de abstracción del adolescente?

Que no haya diferencias entre el GII y el GIII en el número de combinaciones realizadas se explicaría porque la tarea tiene una demanda de capacidad mental inferior a 7. A partir, por tanto, de determinada capacidad mental (6) no habría diferencias notables entre los sujetos. El hecho de que el GI(M = 5) logre un número inferior de combinaciones así lo indicaría.

Que sean los sujetos de M = 6 quien en mayor medida «aprehendan» que el número de combinaciones en la tarea lógico-formal es «infinito», podría deberse a que la captación de eso supone un tipo de procesamiento distinto del que se pone en juego cuando se responde a una tarea como el FIT.

El motivo de traer a colación estos resultados en el contexto de una reflexión (compartida) sobre la educación matemática es el hecho, profusamente documentado, de la importancia de la «intuición» en el descubrimiento matemático. «Cuando se está en el despacho —así resume Brezinski (1993) los testimonios de este tipo— se corrigen las ecuaciones y se colocan en todas las posiciones posibles para intentar obtener la solución. Sólo cuando se está en una situación en la que no se puede escribir *se puede tener cierta visión de conjunto* y se puede pensar el problema de manera más reposada; en estas condiciones puede llegar la iluminación» (p. 95). En términos psicológicos se puede especular que estos momentos son análogos a la utilización de una capacidad mental de 6 unidades, es decir, cuando se prescinde de emplear la capacidad máxima. Si ello es así en el trabajo matemático de alto nivel, deberíamos hacer un esfuerzo para no hurtar, en la medida de nuestra creatividad, esta experiencia a los estudiantes de matemáticas, cualquiera que sea su nivel. Debemos facilitar el descubrimiento de las estructuras subyacentes, provocando que el alumno pueda «debilitar o *desentumecer* una estructura preconcebida para que emerjan nuevas formas de concebir el problema» (Resnick y Ford, 1990).

La importancia de los aspectos didácticos de los textos

Deberíamos dedicar, aunque sea de pasada, algunos comentarios a la reflexión sobre los aspectos didácticos de los textos de matemáticas. En gran medida lo que vale para la transmisión escrita de conocimiento también vale para la transmisión oral.

Parece que no todos los profesores entienden lo mismo por *éxito* en las asignaturas de matemáticas. Para unos es suficiente con que el alumno sea capaz de repetir correctamente los contenidos expuestos; para otros, en cambio, es indispensable que el alumno acredite una comprensión *profunda* de las redes conceptuales de la disciplina. Por lo que respecta a la cuestión de la habilidad para resolver problemas, dos son también las posturas dominantes: para unos basta con que el alumno resuelva problemas de transferencia inmediata o de mera aplicación, mientras que para otros es indispensable que sea capaz de generalizar a otras situaciones tal habilidad, es decir, de acreditar una transferencia creativa por lejana.

Tres son las variables principales, que no las únicas, si prescindimos por una vez de la pericia del profesor, que co-causan el éxito académico en las materias lógico-matemáticas:

(A) Los conocimientos previos que posea el alumno.

(B) La complejidad de la materia objeto de estudio.

(C) La accesibilidad didáctica del texto matemático.

¿Cuáles son las principales características de un texto complejo?

En primer lugar, un nivel muy elevado de abstracción o grado de formalización, lo que exige un despliegue continuado de operaciones de 2º y de 3er orden.

En segundo lugar el carácter contra-intuitivo de gran parte de los conceptos sobre los que se sustentan los contenidos explícitos.

Por último, el largo, penoso, tortuoso a veces, costoso proceso de elaboración socio-histórico.

Cuando todo ello ocurre, la demanda mental de la tarea exige la activación de 7 (no se si a veces más) esquemas, *chunks* o unidades esquemáticas de un modo simultáneo y en un único acto atencional (3 ó 4 segundos probablemente). Dado que los recursos atencionales son limitados, este análisis habla por sí mismo de las dificultades que tiene que superar el estudiante.

¿Cuándo podemos hablar de un texto accesible? Podemos resumir así sus características:

* Si explica cada nuevo concepto que introduce.

* Si va de lo teórico a lo práctico y viceversa.

* Si relaciona las ideas claves.

* Si avisa de las dificultades.

* Si es escalonado, es decir, si respeta la debida jerarquización conceptual.

* Si contextualiza los contenidos.

* Si no tiene erratas, errores, ambigüedades o ideas fundamentales no manifiestas o explícitas.

* Si descompone lo especialmente complejo o las cimas de máxima dificultad en una sucesión armónica de pasos, fases, etapas...

* Si plantea preguntas, ejercicios y los responde, o, plantea las orientaciones para su solución.

Desgraciadamente no hay un texto óptimo para todos los alumnos. Si exceptuamos a los escasísimos alumnos cuyas condiciones iniciales son óptimas y a los que les es indiferente los procedimientos didácticos, nos encontraremos con dos tipos de alumnos: los que están en una zona de desarrollo próxima al grupo superior y los más alejados pero decididamente rescatables.

Los primeros, esto es los intermedios, se beneficiarán más de un texto abierto, interrelacionado o distribuido en forma de red, un texto, en suma, que privilegia formas de procesamiento en paralelo. Por el contrario los más rezagados pero sumamente motivados se beneficiarían de un texto con una orientación más cerrada, monocorde, acompasada, en definitiva, más lineal, secuencial o unívoca.

Los dos tipos de aprendizaje

DISTINTOS enfoques teóricos abordan de forma diferente el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. El enfoque evolutivo de Piaget; la jerarquía de aprendizajes y análisis de tareas de Gagné; el enfoque estructuralista de Bruner y Dienes; la propuesta de Skemp; las aportaciones inspiradas en la teoría de la Gestalt; el constructivismo y el procesamiento de la información (D.S. Macrab y J.A. Cummine, 1992).

Una tarea posible consistiría en intentar algún tipo de síntesis o de aproximación entre los distintos enfoques. La teoría de Pascual-Leone puede ayudarnos en el intento. De acuerdo con esta teoría conviene distinguir entre varios operadores implícitos a la hora de comprender el desarrollo intelectual. Hablaré de algunos de ellos.

Hay dos grandes tipos de aprendizaje. El aprendizaje de carácter lógico (L) y el aprendizaje de contenido (C). Todo el simbolismo matemático, la notación, las convenciones..., por ejemplo, son de este último tipo.

El aprendizaje L, por su parte, se presenta bajo dos modalidades:

Aprendizaje estructural de contenido (LC) que en gran medida supone la organización de los contenidos en niveles de complejidad semántica cada vez mayores, y

Aprendizaje estructural (LM), así denominado por el componente de capacidad *mental* (M) que necesita y requiere. Con su concurso es posible construir (abstraer) los esquemas, los algoritmos, los invariantes que se aplican y aplicarán a una gran variedad de situaciones.

Ejemplo de aprendizaje LC: Aprender la jerarquía de los distintos conjuntos de números, esto es, naturales, enteros, racionales, reales, complejos, transfinitos.

Ejemplo de aprendizaje LM: Descubrir una paradoja en teoría de números, por ejemplo, que el conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, se pertenece y no se pertenece a sí mismo, simultáneamente.

Tanto las estructuras LC como las estructuras LM tienen distinto rango de complejidad: LC1-LC2-LC3..., LM1-LM2-LM3..., esto es, se organizan en racimos jerárquicos, de tal forma que cada estructura ocupa su lugar en la macroestructura general de conocimiento, lo que le asigna su propio grado de abstracción.

Los expertos en el campo de las matemáticas están continuamente convirtiendo estructuras LM en estructuras LC en la medida que consiguen automatizar las primeras. Es lo que hacen, por ejemplo, cuando tienen disponible el procedimiento de demostración por reducción al absurdo para utilizarlo cuando una situación lo demanda.

El descubrimiento, la invención o la creación, en cambio, tienen que ver con la conversión de estructuas LC en estructuras LM. La clásica narración de Poincarè de su descubrimiento de las funciones fuchsianas es un buen ejemplo.

Como se ve no puede haber estructuras CM, pues M sólo se aplica sobre L o LC.

Para finalizar este apartado diremos que el aprendizale L (en sus distintas modalidades) produce excitación, alegría, euforia, emociones positivas, en suma; mientras que el aprendizaje C, no.

Será posible mejorar la enseñanza de las matemáticas en la medida que seamos capaces de analizar los distintos procesos implicados en cada nuevo contenido que queramos transmitir. ¿Por qué es tan difícil comprender el concepto de derivada, por ejemplo? Es preciso reunir en una única «estructura» mental los esquemas mentales previos de: función, proporción, ecuación, incremento, infinitésimo, límite, límite de un cociente, formalización (Cauchy). Todo ello, además, bajo el «artificio» de forzar, primero, un incremento, para luego, al final, considerarlo nulo. Sabemos que cada uno de estos esquemas tienen por sí mismos una gran dificultad. De ahí lo costoso que le resulta a cualquiera integrarlos —todos— en un solo concepto. Debemos buscar, por tanto, no sólo que los alumnos *aprendan* a «derivar», sino sobre todo que *aprehendan* la estructura profunda de esta construcción matemática.

Los errores, las resistencias y las ilusiones

Hablemos ahora de errores, sesgos, ilusiones y resistencias que entorpecen el desarrollo del pensamiento, en general, y también del razonamiento matemático. Todos los profesores de matemáticas saben que hay determinados tipos de errores que son universales. Hay, fundamentalmente, dos tipos de errores: los de comprensión, que son los más costosos de superar, y los de aplicación, que están provocados por ciertas ilusiones perceptivas y resistencias cognitivas. Entre los primeros se encuentra, por ejemplo: el razonamiento circular, las paradojas no conscientes, las peticiones de principio, los razonamientos tautológicos.

Por lo general, la explicitación de estos «vicios» supone un avance significativo de las estructuras LM. Como vemos en el siguiente ejemplo es difícil, incluso para los genios, sustraerse a este tipo de error:

«Wiener fue un pionero dentro de numerosos temas(...) Sin embargo, los detalles de sus trabajos eran invariablemente de lo más inexacto y en él se justificaba más que en ninguna otra persona la afirmación: la fama de los matemáticos descansa sobre un cierto número de demostraciones falsas(...) Como ejemplo de las inexactitudes de Wiener uno de los teoremas principales de su libro sobre la integral de Fourier depende de una serie de lemas, entre los cuales hay uno cuya demostración supone el teorema principal» L. Young (1981, p. 326).

La superación de estos errores demanda el concurso de M (capacidad mental). Hay, como ya he dicho, otros errores, los de aplicación, que están provocados por ciertas *resistencias intelectuales*. Son propensiones muy arraigadas en el psico-organismo que le llevan a activar esquemas improcedentes que impiden, a su vez, el despliegue de los esquemas adecuados a la situación. Son, por ejemplo, las tendencias verificacionistas, las resistencias a la falsación, la dificultad para des-centrarse de una determinada «fijación» cognitiva, única forma de llegar a la solución adecuada.

Hay, aún, otro género de impedimentos del progreso en el aprendizaje, que son los provocados por las llamadas *ilusiones*. En este contexto no nos referimos a las puramente perceptivas, sino a las perceptivo-intelectivas, por estar causadas por el factor F, que puede entorpecer la construcción conceptual más allá de las apariencias engañosas. Dado que la realidad es más que apariencia, el psico-organismo si quiere sobrevivir no tiene más remedio que construir conceptos en un proceso inacabable, única posibilidad de superar las situaciones engañosas.

Un ejemplo de ilusión perceptiva nos lo proporciona la dificultad demostrada por los contemporáneos de Cantor para aceptar la posibilidad del infinito actual.

Puesto que el campo de las ilusiones es inacabable, sólo señalamos las más significativas para nuestros propósitos actuales.

- La tendencia al cierre y a la clausura.
- La tendencia a las soluciones prematuras.
- Dificultad para diferenciar esquemas semejantes, pero distintos, por la dominancia de las estrategias globalizadoras.

No debe extrañarnos que nuestros alumnos cometan errores, muestren resistencias o sufran ilusiones, sobre todo cuando se trata de situaciones engañosas, pues cuando la situación es familiar no les ocurre lo mismo. Todas estas cosas forman parte del modo en que nuestro sistema cognoscitivo funciona. Lo importante es conocer la posibilidad de que ello suceda y ser capaces de utilizar estos errores de un modo constructivo. Para ello nos será muy útil conocer cada vez mejor la historia de las matemáticas: también nuestros antepasados cometieron errores semejantes. Es un enfoque muy fértil aquél que sabe vincular el desarrollo matemático colectivo con el desarrollo matemático individual.

También es muy útil conocer cada vez mejor cuáles son los procedimientos que utilizamos los humanos para construir conocimiento. El análisis de los procesos creativos que se ponen en marcha en el trabajo matemático es condición *sine qua non* para fomentar la creatividad en nuestros alumnos. Todo alumno que capte una determinada «verdad» matemática seguirá *grosso modo* los mismos pasos que condujeron al creador a ella. El mecanismo clave que se suscita en el proceso creativo es la habilidad para des-centrarse de un punto de vista inadecuado y la capacidad para centrarse en otro más prometedor. Ello requiere invertir capacidad o atención mental, única forma de cambiar la manera de abordar la situación. No tenemos, en general, esquemas erróneos, sino una tendencia a utilizar esquemas que siendo correctos en una situación, no lo son en otra. Es lo que ocurre en las situaciones engañosas. Cuando los esquemas adecuados ya están en el repertorio del alumno, basta con des-interrumpir su activación a la vez que se interrumpe la de los inapropiados. Cuando los esquemas adecuados todavía no están construidos, es cuando hay que liberar la máxima atención, energía, poder o capacidad mental. Sólo invirtiendo capacidad mental sobre las estructuras lógico-matemáticas previas se pueden construir los esquemas apropiados.

Por tanto dediquemos tiempo al estudio de la epistemología de las matemáticas en conexión con el estudio de la epistemología de la inteligencia humana, en general. En la medida en que avancemos en su conexión, avanzaremos, igualmente, en la enseñanza de las matemáticas.

REFERENCIAS

GRATTAN-GUINNESS, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1919.* Madrid: Alianza Editorial.

PIAGET, J. e INHELDER, B. (1966). *Psicología del niño.* Madrid: Morata.

PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Madrid: Siglo XXI.

INHELDER, B. y PIAGET, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* Barcelona: Paidós.

HANSON, N.R. (1977). *Patrones de descubrimiento. Observación y explicación.* Madrid: Alianza.

RESNIK, L.B. y FORD, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós.

ZUBIRI, J. (1983). *Inteligencia y razón.* Madrid: Alianza.

DE RIBAUPIERRE, A. y PASCUAL LEONE, J. (1979). Formal operations and M. power: a neopiagetian investigation. En D. QUHN, *Intelectual development beyond childhood.* San Francisco: Jossey-Bass.

BREZINSKI, C. (1993). *El oficio de investigador.* Madrid: Siglo XXI.

MACRAB, D.S. y CUMMINE, J.A. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16.* Madrid: Visor.

YOUNG, L. (1981). *Mathematicians and their times.* Amsterdam: North Holland. Citado en C. Brezinski, 1993.

Resumen

La dificultad que entraña el aprendizaje de las matemáticas aconseja la estimulación de todos los posibles recursos intelectuales con los que cuentan los alumnos. Entre éstos se encuentran no sólo los lógico-formales sino también los aspectos intuitivos y dialécticos. También se sugiere la formación epistemológica e histórica de los docentes en el campo de las matemáticas si se quiere mejorar su enseñanza. Igualmente, el proceso de creación matemática es una rica fuente de ideas a la hora de renovar los enfoques didácticos tradicionales.

Palabras clave: Epistemología. Pensamiento formal. Intuición. Atención mental. Aprendizaje. Errores.

Abstract

Learning Mathematics is a difficult task, therefore it is required to stimulate all intellectual potential students passess. This potential is not only that logical-formal but also intuitive and dialectic. It is also suggested in the article that Mathematics teachers should have a historical and epistemological training if they want to improve their teaching. The process of mathematical production is a rich source of ideas when trying to renew the traditional methods.

Key words: Epistemology. Formal Thinking. Intuition. Learning. Mistakes.

Antonio Corral
Dpto. de Psicología Evolutiva
Facultad de Psicología
Universidad Nacional de Educación a Distancia
Ciudad Universitaria
28040 MADRID