Del análisis de las Matemáticas de la L.O.G.S.E. en la Educación Secundaria a otras reflexiones didácticas

Javier Peralta

1. Introducción

EL presente artículo tiene su punto de partida en un análisis sobre el tratamiento que se da en la L.O.G.S.E. a las matemáticas correspondientes a la Educación Secundaria. Para ello se estudian, en primer lugar, la metodología recomendada por el M.E.C. y, posteriormente, los contenidos de matemáticas en ese nivel educativo.

A raíz precisamente del examen anterior, se exponen consideraciones didácticas más generales sobre la enseñanza de las matemáticas, con la intención de mover al lector a la reflexión y al debate, de los que acaso saque consecuencias para su ejercicio docente.

Concluimos con una valoración final —que obviamente puede no ser compartida—, en la que mostramos nuestra opinión sobre si las matemáticas que aparecen en ese diseño educativo son o no las adecuadas para un estudiante que vaya a acceder posteriormente a la Universidad.

2. Reflexiones metodológicas

Comenzaremos analizando la metodología sugerida en la L.O.G.S.E. para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria, tal como hemos anunciado; más tarde nos ocuparemos de los contenidos.

Un aprendizaje más atractivo

Un primer aspecto que se desprende de la metodología aconsejada por el M.E.C. es que se utilicen métodos de enseñanza que hagan más atractivo el aprendizaje de las matemáticas.

Respecto a ello hay que decir que evidentemente es muy deseable hacer las matemáticas más asequibles pero, como es lógico, ello no puede depender sólo de la actitud del profesor y de la metodología que se emplee, sino también de la estructura interna de la materia. Conviene afirmar, por tanto, que aun siendo muy positivas las recomendaciones que se hacen respecto a procedimientos, estrategias y actitudes, no hay que olvidar tampoco que, se enseñen como se enseñen, las matemáticas habrán de mantener ciertos rasgos que le son propios, y no está claro ni mucho menos que se hagan patentes en el enfoque que ofrece el M.E.C. Nos referimos a los siguientes, inspirados en Servais (1980):

a) Su carácter de disciplina.

Posiblemente la matemática sea la asignatura que posee más el carácter de disciplina, y ello como resultado de un conjunto de propiedades que tiene en mayor grado que otras materias. Así se desprende de su organización hipotético-deductiva a partir de una axiomática, de la que se deducen a su vez una estructuración esquemática y sintética de sus contenidos y unos métodos de razonamiento formales que confieren a las matemáticas una solidez y rigidez muy acusadas.

b) Su condición jerarquizada y su significación global.

Se puede decir que las matemáticas son una asignatura jerarquizada, en el sentido de que para comprender un concepto es frecuente que se necesite haber estudiado otros anteriores. Ello no sucede en otras materias, donde es posible conocer una parte ignorando otras; en matemáticas, sin embargo, todo se relaciona.

Este carácter acumulativo y global exige para su comprensión un esfuerzo de memoria sintética y, aunque esa conexión entre distintas partes es sin duda una ayuda que facilita la comprensión y visión conjunta de diferentes nociones, se precisa haber alcanzado un cierto nivel para apreciar esa interrelación.

c) Su exigencia.

Las matemáticas suelen ser consideradas como una de las asignaturas con mayor nivel de exigencia, aunque es habitual asimismo reconocer el carácter de objetividad de sus pruebas.

Entre las causas de esa exigencia hay que considerar en primer lugar que en otras materias no sucede como en matemáticas, donde un error casi siempre se extiende, y un fallo en un cálculo concreto puede afectar al desarrollo posterior. En segundo lugar, en matemáticas hay que «ir al grano», y no existe posibilidad de responder a las preguntas que se formulan con vaguedades y frases huecas, sino que se valoran especialmente la claridad y la concisión. Por último, es preciso haber hecho multitud de problemas para ser capaz de resolver otros que difieran de los ya realizados, y aunque el planteamiento suele ser el aspecto más difícil de los mismos, es frecuente subestimar ese valor de creación e imaginación, al que habitualmente sólo se llega tras un trabajo duro y tenaz de ejercitación.

d) Su nivel de abstracción.

Para ser un buen artista, por ejemplo, es fundamental la personalidad subjetiva del sujeto; en cambio, en las ciencias positivas, y muy especialmente en matemáticas, se exige la renuncia voluntaria de sus practicantes a toda subjetividad; por ello, para algunos, la matemática es la materia más alienante de todas.

En matemáticas se procede por abstracción y esquematización sucesivas. Como señala Puig Adam (1960): «Por abstracciones sucesivas edificamos categorías mentales en las que se estratifican lo concreto y lo abstracto en orden de abstracción creciente y concreción decreciente,...». Por depuraciones progresivas, las nociones se van refinando y vaciando de contenido semántico para acceder a un estadio exclusivamente lógico. Y ese razonamiento lógico, totalmente en el mundo de las ideas, aisla a las matemáticas del mundo y de los demás, y coloca a las matemáticas alejadas de la realidad concreta.

Esas afirmaciones, válidas para el estudio de las matemáticas superiores, constituyen sin embargo un auténtico despropósito si se refieren a su enseñanza en la Educación Secundaria. Por ello, tal como sugiere la L.O.G.S.E., habrá que tratar de aproximar las matemáticas a la realidad. De ello hablaremos a continuación.

El sentido de aplicación

Un segundo elemento —digno de elogio, por cierto— que establece la L.O.G.S.E. es la recomendación metodológica de propiciar la aplicación de las matemáticas a la vida real.

En relación con este aspecto, indudablemente positivo, acaso convenga recordar que sus dos ramas iniciales: aritmética y geometría, nacieron para resolver problemas de la vida ordinaria; la primera por la necesidad del empleo de los números para contar y efectuar transacciones comerciales, y la segunda para realizar mediciones. Y de esta manera fueron desarrollándose ambas y la matemática en general.

No obstante, a pesar de ello, siempre ha existido el matemático caracterizado por el desprecio de lo experimental y de las aplicaciones de las matemáticas, cuya referencia aparece en numerosos pasajes de la literatura —como por ejemplo, en «Los viajes de Gulliver», donde se describe un país cuyos habitantes son matemáticos que desprecian lo práctico y, en consecuencia, sus casas están mal construidas, sus trajes mal cortados, etc.—, y queda reflejado en frases como las siguientes:

«La matemática sólo sirve para el desarrollo del gusto de los razonamientos sutiles. Los más eminentes matemáticos no saben con frecuencia conducirse en la vida y se desorientan frente a las menores dificultades» (Le Bon). «La matemática es un estudio que no obliga a la observación, a la inducción, a la causalidad» (Huxley). «El matemático tiene horror a lo real, abomina del caso particular; la abstracción y la generalización son los ídolos a los que sacrifica el buen sentido. Cuando ya no queda nada de un fenómeno es cuando razona a sus anchas; el vacío es su elemento; la forma, su dios» (Bouasse).

Estas opiniones, algo exageradas sin duda, encuentran sin embargo una cierta justificación si se examinan las distintas fases que pueden distinguirse en un modelo matemático, y se analiza a cuál o cuáles de ellas se ha dirigido la enseñanza tradicional de las matemáticas.

Como es sabido, en un modelo matemático se pueden considerar tres fases: la abstracción, mediante la cual se procede a definir los conceptos partiendo de la realidad o de ideas intuitivas; el razonamiento lógico-matemático, con el que se construye la correspondiente teoría, estableciéndose los teoremas y proposiciones; y la concreción o proyección de estos resultados al campo real para obtener aplicaciones. Sin embargo, la enseñanza de la matemática se ha reducido casi siempre a la segunda, esto es, al razonamiento lógico, desprovisto de toda significación real; y como consecuencia, en la enseñanza se ha producido un divorcio entre las matemáticas y la realidad. Las matemáticas se han presentado entonces imbuidas en un exceso de formalismo, pero sin ninguna utilidad, no teniendo en consideración que se desarrollaron inicialmente, y así transcurrieron a lo largo de los siglos, por dos motivos principales: para satisfacer necesidades sociales o de la vida cotidiana, o como ayuda de otras ciencias, fundamentalmente la física.

Permítaseme la licencia de contar una vieja historia que caricaturiza esa actitud despectiva de algunos matemáticos puros hacia la aplicabilidad de las matemáticas: «Un hombre, único tripulante de un globo se hallaba perdido y desesperado, y optó por lanzar lastre para tomar tierra de inmediato, encontrándose en un paraje dominado por una intensa niebla. Al dar con uno de los sacos de lastre en la cabeza de un pensador que estaba sentado sobre unas piedras, el modesto y desconcertado aeronauta se apresuró a pedir disculpas, y aprovechó la ocasión para preguntar al solitario pensador si podía ayudarle a saber dónde estaba. Éste le observó un instante, agachó la cabeza y volviendo a levantarla le dijo: está en un globo sobre mi vertical. El viajero preguntó entonces: ¿es usted matemático?; sí —dijo el pensador gratamente sorprendido—, ¿cómo lo ha descubierto? Nuestro desanimado aventurero añadió: me ha observado, ha reflexionado sobre ello y me ha dado una respuesta lógica, absolutamente exacta y perfectamente inútil».

La auténtica educación matemática, no obstante, debe de fomentar el sentido de aplicación, en su doble vertiente: abstracción y concreción, como asimismo el desarrollo de la intuición.

El remedio para propiciar la abstracción ha de comenzar en su propio origen: en la etapa de formación de los conceptos. Para ello, antes de iniciar el proceso lógico, es preciso que el estudiante disponga de un buen número de hechos concretos: observaciones, experiencias y conjeturas que sean el germen de las nociones abstractas. La facultad de abstracción debe de comenzar por lo concreto, pues si abstraer es prescindir de algo para quedarse con lo fundamental, se ha de partir porque exista ese algo de que prescindir; sin embargo, en la enseñanza habitual de la matemática se dan ya las abstracciones hechas, y no se propicia el que puedan ser formuladas por el alumno.

Tampoco ha de limitarse el proceso de aprendizaje a resolver problemas de «aplicación» después de explicaciones teóricas, sino que debe fomentar la concreción de los resultados, es decir, la proyección a la realidad de las consecuencias a las que se ha llegado por razonamientos abstractos.

Y respecto de la intuición, digamos que, dejando de lado todas las excelencias de la lógica, es indudable que ésta no es suficiente para el desarrollo de la ciencia; y asimismo la enseñanza de las matemáticas no debe reducirse a potenciar el razonamiento lógico, sino que es preciso también estimular el uso de la intuición. En la evolución de la matemática se observa que el verdadero faro que ilumina y descubre nuevos caminos es la intuición; la lógica viene casi siempre después, limitándose a demostrar los descubrimientos debidos a aquélla; o dicho en palabras de Poincaré: «es la intuición la que descubre, y la lógica la que demuestra».

La historia de la matemática

El tercer aspecto metodológico que resaltamos es la sugerencia que se hace a la utilización de la historia de la matemática.

Ello nos parece muy positivo, ya que en la enseñanza tradicional de la matemática, los conceptos y los descubrimientos matemáticos suelen presentarse totalmente separados del proceso histórico que dio lugar a su creación. Su exposición se realiza habitualmente fuera del contexto que motivó su génesis, produciéndose un total alejamiento entre la evolución de los conocimientos matemáticos y su transmisión. Sin embargo, el conocimiento de la historia de la matemática y su uso en la enseñanza puede acercar ambos procesos y jugar un importante papel para motivar a nuestros alumnos, tal como recomienda la L.O.G.S.E.

Pongamos un ejemplo tomado de Bouvier et al. (1986), que recoge lo que aparece en un libro de texto francés la primera vez que el alumno tiene contacto con el teorema de Tales: «Enunciaremos el teorema siguiente, conocido con el nombre de teorema de Tales. Teorema: Sean A y B dos puntos distintos de una recta r y M otro punto cualquiera de la misma; sean A' , B' y M' las imágenes de los puntos A, B, M por una proyección no constante P de la recta r sobre una recta r'. Entonces el punto M' tiene la misma abscisa en la referencia (A', B') que el punto M en la referencia (A, B)». Y todo el capítulo sobre el teorema de Tales tiene ese mismo tono.

Este ejemplo, aunque algo extremo, no puede decirse sin embargo que constituya exactamente una excepción. ¿Qué atractivo puede tener el enunciado anterior u otros similares para un alumno? ¿Dónde aparece la problemática que originó el teorema? Aunque en algunos textos hay ciertas referencias históricas a la figura de Tales, hasta hace poco raramente se hacía mención al problema que dio lugar al teorema.

Como es sabido, sin embargo, el problema de Tales (tratar de medir la altura de las pirámides de Egipto por medio de su sombra, lo que Tales realizó en el momento en que la sombra de un palo coincidía con su altura) es perfectamente inteligible para los alumnos de ese nivel. Tengamos en cuenta que, en realidad, lo que Tales descubrió es la posibilidad de la reducción, la noción de modelo: como la pirámide es inaccesible, inventó la escala. Partiendo por tanto del problema de Tales (la medida de la altura de una pirámide) se puede crear una situación que movilice el interés y la reflexión de los alumnos.

En éste y otros ejemplos que podrían citarse se observa que la historia de la matemática constituye un instrumento de apoyo excelente para crear situaciones didácticas. Pero no sólo eso; en la evolución de la matemática y en el estudio de su historia, se observan ciertos comportamientos o situaciones que pueden ser de interés para su enseñanza, ya que de ellos caben deducirse principios didácticos o, simplemente, conclusiones que iluminen nuestra acción docente. Por ejemplo, la conveniencia de ir de lo particular a lo general, como se deduce del examen de textos antiguos y de contemplar cuál ha sido la forma habitual de proceder en la génesis de numerosos conceptos; la intención de «humanizar» la enseñanza de las matemáticas, resaltando las dificultades, anécdotas y ciertos rasgos personales de algunas figuras de la matemática o constatando la cooperación entre distintos matemáticos; la ayuda para reencontrar el sentido de lo que enseña —en contra del fenómeno de «despersonalización» y «deshistorización» del saber (lo que los pedagogos llaman «transposición didáctica»)— y para la comprensión de ciertos errores de los alumnos; etc.

(Para un desarrollo más amplio de los anteriores argumentos puede consultarse el libro (Peralta 1995)).

Interdisciplinariedad

Otra recomendación metodológica que se hace en la L.O.G.S:E. es la de tratar de presentar relaciones de las matemáticas con otras áreas del currículo, es decir, resaltar la interdisciplinariedad.

Hay que decir de entrada que ello nos parece muy conveniente ya que, efectivamente, ha sido notoria hasta ahora la absoluta desconexión entre distintas asignaturas, lo que impide que, al final de la Enseñanza Secundaria, el alumno pueda percibir una cierta visión general del saber científico y humanístico (aunque obligadamente elemental), y se encuentre en condiciones de relacionar entre sí hechos diversos o ideas que fueron introducidos desde distintos puntos de vista.

Admitamos, sin embargo, la gran dificultad que entraña abordar teorías científicas o hechos históricos desde diferentes ópticas. Las causas son varias y, en nuestra opinión, se deben no sólo a la amplitud de los programas —lo que exige olvidarse de los «aspectos accesorios» para poder llevar el ritmo adecuado (aun cuando dichos aspectos serían un buen campo en el que los alumnos podrían desarrollar trabajos más creativos)—, sino también a una preocupación, posiblemente encomiable, de no hablar más que de aquello que se conoce mejor.

Por todo lo anterior, como ya hemos dicho, nos parece positivo que en la L.O.G.S.E. se aconseje esa interdisciplinariedad, recomendación que por otro lado viene dada desde antiguo. Lo que hay que hacer es señalar con más precisión las posibles relaciones de las matemáticas con otras áreas de conocimiento. Citemos algunas:

En primer lugar, se deben resaltar las conexiones más evidentes de las matemáticas con las ciencias de la naturaleza y la tecnología (medidas de magnitudes, pH, vectores, derivadas, ...), y presentar los conceptos con un mismo lenguaje, lo que, como es sabido, no sucede siempre (por ejemplo, los vectores en matemáticas y en física). En segundo lugar, y debido a que las leyes de la naturaleza suelen expresarse en lenguaje matemático, es posible ofrecer multitud de ejemplos de funciones que aparecen en las ciencias. Así, el movimiento uniforme o la función que expresa la longitud de un cuerpo en términos del coeficiente de dilatación lineal y temperatura, como ejemplos de funciones lineales; la ecuación de la trayectoria de un proyectil, de función cuadrática; la ley de Boyle-Mariotte como ejemplo de función de proporcionalidad inversa; el período de un péndulo, de función irracional; la desintegración radiactiva, la ley de enfriamiento de Newton o la variación de la presión atmosférica con la altura, como ejemplos de funciones exponenciales; etc.

Pero no sólo existen relaciones con las ciencias, sino que las matemáticas están asimismo presentes en otras áreas del conocimiento. Por ejemplo, en artes plásticas: geometría de figuras, proporcionalidades, ...; en ciencias sociales: tasas, índices, gráficos, mapas y planos a escala, crecimiento demográfico, curva logística, ...; en psicología: ley de estímulo-sensación, ...; en economía: ley de la oferta y la demanda, interés, ...; etc. Y por supuesto, hay que mencionar además como cuestión fundamental el importante apoyo que proporciona la estadística para el estudio de prácticamente todas las áreas del saber.

En otro orden de ideas, y posiblemente como consecuencia de una enseñanza tradicional de la matemática, que presenta a ésta como una materia cerrada y fría y sin ninguna relación, a pesar de las muchas existentes, con otras parcelas del conocimiento —algunas de las cuales acaban de ser puestas de manifiesto—, ni con la evolución cultural de la humanidad, nace una concepción de las matemáticas muy alejada de la cultura.

En relación con ello hemos de decir que, debido seguramente a nuestra tradición cultural en las artes y la literatura, pero no en las ciencias, no suele existir pudor en admitir una falta de conocimiento u olvido de las nociones matemáticas más elementales, incluso tratándose de personas cultas. A ningún profesor, por ejemplo, se le ocurriría decir en la sala de reuniones de su centro: «Tú que eres de Geografía, ¿dónde se encuentra la República Dominicana?», o «Tú que eres de Lengua, corrígeme esta carta», o incluso: «Fulano se ha roto la tibia; tú que eres de Ciencias, ¿dónde está la tibia?». Sin embargo, no hay recato en requerir de un profesor de matemáticas que calcule, por ejemplo, un tanto por ciento o una media aritmética (a pesar de que estas peticiones se hacen la mayoría de las veces por comodidad o porque se supone que el matemático lo efectuará más rápidamente, hemos comprobado en alguna ocasión que no era esa la causa, sino que quien lo solicitaba, efectivamente no lo sabía hacer, y que su manera de razonar en matemáticas se asemejaba a la de un niño de corta edad).

Parece deducirse de todo lo anterior que las matemáticas no fueran consideradas como uno de los elementos de la evolución cultural de la humanidad y, en consecuencia, que su conocimiento no tendría porqué formar parte del bagaje de una persona culta. Nuestra opinión, sin embargo, está en total desacuerdo con ello, y trataremos de justificarla en las siguientes líneas.

En primer lugar, parece obvio afirmar que muchos de los grandes pensadores de la humanidad se han dedicado asimismo a la matemática, razón por la que se pueden encontrar a lo largo de la historia numerosos filósofos que a su vez han sido matemáticos, y viceversa, y han dejado patente la importancia de la matemática en la construcción del pensamiento y en la evolución de las ideas (baste como botón de muestra el «Prohibido entrar a quien no sepa geometría», colocado a la entrada de la Academia de Platón, que constituye junto al Liceo de Aristóteles las dos escuelas filosóficas principales de Atenas en el siglo IV a. C.).

También está la consideración de las matemáticas como arte, que se hace por ejemplo en el «Ars Magna» de Cardano (Etayo et al. 1995), donde arte tiene la acepción de conjunto de reglas y conocimientos relativos a una materia («de regulis algebraicis» en el Ars Magna). De igual modo, la aritmética y la geometría aparecen incluidas dentro de las denominadas «artes liberales» (la gramática, la retórica y la lógica o la dialéctica, que forman el «trivium» de Zenón; y la aritmética, la geometría, la música y la astronomía, que constituyen el «quadrivium» de Arquitas), que figuran representadas en distintos lugares; por ejemplo, en el Museo de Arte Románico de Barcelona, donde la aritmética y la geometría vienen acompañadas, respectivamente, por Euclides y Pitágoras; o en la Biblioteca del Monasterio de El Escorial, que vienen encarnadas, entre otros, por Arquitas y Boecio, la primera de ellas, y por Arquímedes y Aristarco la segunda.

Y podrían ponerse muchos otros ejemplos de la presencia de las matemáticas en las más diversas expresiones culturales y artísticas. Baste con pensar en la «divina proporción» de Luca Pacioli («sección áurea» de Leonardo da Vinci o «sección divina» de Kepler), nacida en relación con el descubrimiento de los números irracionales, y que es considerada desde el punto de vista estético como la proporción más bella, razón por la que aparece por doquier a lo largo de toda la historia del arte: capiteles corintios, fachada del Partenón de la Acrópolis de Atenas, numerosos templos griegos, catedrales góticas, palacios renacentistas, e incluso en arquitectura moderna, y que asimismo ha sido utilizada en diferentes figuras ornamentales (espiral de Durero, cruz de Lorena, ...). O su relación con la música, conocida ya desde los pitagóricos —que vincularon las propiedades y relaciones de la armonía musical con la armonía reflejada en los números, estableciéndose de ese modo el sistema pitagórico de afinación musical—, y admitida desde entonces de manera general, y que viene reflejada en frases como la siguiente (Etayo et al. 1995): «La música es un ejercicio de aritmética secreta» (Leibniz), «La música es un arte terriblemente euclidiano» (Alejo Carpenter), etc. O, para finalizar, su interrelación en determinados momentos con la pintura, como se pone de manifiesto con el nacimiento de la perspectiva en el Renacimiento (Leonardo da Vinci, Durero, Piero della Francesca, ...), o en el paralelismo que se observa en la segunda mitad del siglo XIX (Dunham 1992) entre una cierta liberalización del arte de la realidad visual (Cézanne, Gaugin, van Gogh, ...) y el descubrimiento de las geometrías no euclídeas independientes del «mundo real» (Beltrami, Gauss, Bolyai, Lobachewski, ...).

Metodología heurística

Otro de los aspectos positivos que hemos resaltado de la enseñanza de las matemáticas en la L.O.G.S.E., es que se propicia una metodología heurística que destaca la importancia de la actividad del alumno en el proceso de aprendizaje, en contra de otra excesivamente expositiva y dogmática. Se sugiere por tanto la conveniencia de una metodología no sólo activa, sino que esa actividad se oriente a la elaboración de los conceptos y sus propiedades, de modo que el alumno sienta alegría al descubrir la verdad por su propia inventiva, a partir de situaciones didácticas hábilmente creadas ante él por el profesor para despertar el interés.

Nuestra valoración sobre este tipo de metodología es sumamente positiva, siempre que no se practique con carácter general, ya que también conlleva, a nuestro juicio, algunos inconvenientes como los siguientes:

a) Lentitud del procedimiento.

Es consecuencia de que en este aprendizaje por descubrimiento las nociones no se dan hechas de antemano y, por tanto, se requieren una etapa de tanteo anterior a la captación del significado, y una fase posterior de comprensión e interiorización de la información descubierta (fase, por otro lado, más dulcificada que en el caso de la enseñanza tradicional, por haber participado en la elaboración de los conceptos).

b) Dificultad de su aplicación en clases numerosas o heterogéneas.

En efecto, pues el plantear preguntas y cuestiones con las que los alumnos deben ir trabajando, tiene el inconveniente que haya alumnos —o grupos de alumnos, si el trabajo se plantea en grupos—, que normalmente se adelanten a los demás en sus respuestas, con la consiguiente pasividad de éstos, lo que puede inducirles con el tiempo a una pérdida de interés.

c) Falta de trascendencia de los conceptos.

Las situaciones iniciales en este método se toman a veces de la vida real, y a partir de ellas se procura que el alumno construya conceptos, conjeture hechos u obtenga propiedades. Pero en todo ello hay un peligro: que una vez que se ha llegado a donde se deseaba, no se sepa extraer del ejemplo el concepto o resultado en cuestión para captar lo fundamental del mismo en un proceso de abstracción, y poder aplicarlo a otras situaciones distintas; es decir, que no se trascienda del ejemplo concreto al caso general.

Como ejemplo de ello podemos tomar el siguiente (Etayo 1972) en el que se tratan de establecer las nociones de clase de equivalencia y de conjunto cociente, una vez que se han estudiado las relaciones de equivalencia. Resumidamente la situación es la siguiente:

Se le pregunta a un alumno qué autobús toma para ir a un determinado lugar: supongamos que la respuesta es el 12. Se le contesta entonces que el 12 no es un autobús, sino una línea de autobuses, que resulta de definir entre todos los autobuses municipales de la ciudad la relación binaria que establece que dos autobuses están relacionados si hacen el mismo recorrido. Esta relación es obviamente de equivalencia, lo que permite clasificar el conjunto en clases de equivalencia; cada clase está formada por todos los autobuses relacionados entre sí; esto es, que hacen el mismo itinerario. A cada clase de equivalencia se le denomina línea de autobuses, y al conjunto cuyos elementos son las clases, es decir, las líneas de autobuses, conjunto cociente.

A pesar de la bondad de este ejemplo, que permite introducir las definiciones de clase de equivalencia y de conjunto cociente en un conjunto cualquiera con una relación de equivalencia arbitraria definida en él, la experiencia nos confirma que, si con posterioridad se preguntan los conceptos de clase de equivalencia y de conjunto cociente, hay siempre una cantidad apreciable de alumnos que los refieren al caso particular de los autobuses, sin ser capaces de dar el salto a una situación general. Para ello será preciso plantear además otros ejemplos en los que también estén involucradas esas nociones, antes de iniciar el proceso de abstracción en pos de la definición general.

De la necesidad de creación de esa variedad de situaciones motivadoras, de la dificultad que conlleva el planteamiento de una clase de forma flexible y activa —con el consiguiente problema de ruido y quizás alboroto—, y de la exigencia de una mayor atención al estudiante, se deduce además que la práctica del método heurístico supone un enorme trabajo para el profesor.

Como consecuencia de todo lo dicho anteriormente, concluimos que, enseñanza heurística, sí, pero en pequeñas dosis: propugnarla con carácter general nos parece una utopía.

Concepción formal de la matemática

Entre las características metodológicas para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria que se observan en la L.O.G.S.E., vamos a destacar ahora una que va dirigida al Bachillerato. Nos referimos a la indicación que se hace de que en el Bachillerato se empiecen ya a estudiar las matemáticas con un tratamiento relativamente formal.

Evidentemente eso nos parece bien, aunque la recomendación sea algo tardía, ya que, ¿con qué fundamentos teóricos se han estado construyendo entonces las matemáticas anteriores?, ¿cómo es posible que no se reconozca la conveniencia de presentar hasta los dieciséis años una cierta organización formal? Sería una pena que, como consecuencia de ello, el alumno no comenzara a percibir hasta esta edad la estructuración lógica de la matemática, tan conveniente además para la comprensión del método científico, y podría incluso decirse que para el razonamiento en general.

Es sabido, sin embargo, según señala Piaget al dividir en cuatro etapas el desarrollo intelectual del niño: sensomotriz, preoperativa, etapa de las operaciones concretas y etapa de las operaciones formales, que esta última se alcanza aproximadamente a los catorce años, que es cuando la mente empieza ya a ser capaz de realizar razonamientos matemáticos formales. ¿Porqué entonces ese retraso en fomentar ese tipo de razonamiento?

Nuestra opinión es que, como consecuencia de ello, el alumno llegará al nuevo 1° de Bachillerato con una actitud mental hacia las matemáticas —que tememos incluso que pudiera ser más general—, similar a como ahora acude a 1° de B.U.P.: pidiendo que se hagan los cálculos y los razonamientos con números y no con letras, confundiendo la hipótesis con la tesis de un teorema, y empleando argumentos del tipo: «como todo número que acaba en 2 es par, todo número que no acabe en 2 será impar».

¿A qué edad van a empezar los alumnos a razonar correctamente, si a este planteamiento de las matemáticas se añade además la marginación de la Filosofía? Parece como que el hecho de extender la escolarización obligatoria hasta los 16 años debiera implicar que, como entonces habrá muchos alumnos, casi todos ellos serán tontos.

3. Los contenidos. Valoración final

Hablemos ya de los contenidos de matemáticas en la Educación Secundaria; comenzaremos con los relativos a la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Digamos en primer lugar que nos merece una consideración muy positiva el que figure con un peso importante la geometría elemental —que prácticamente había desaparecido del B.U.P., limitándose a su estudio en coordenadas, vía el álgebra lineal—, así como que se propicie el uso de la calculadora, que se aborde el estudio de la resolución de problemas, y que esté presente la estadística en sus programas (que esperemos que efectivamente se estudie, y no como sucedía hasta ahora, que a pesar de figurar en 1° de B.U.P. —además de en 3° de B.U.P. y en C.O.U.—, casi nunca daba tiempo a que se viese). Acto seguido hay sin embargo que dejar constancia que el nivel de los contenidos es casi siempre excesivamente elemental, como consecuencia del menor número de horas semanales dedicadas a las matemáticas, y del proyecto académico en sí, poco ambicioso en cuanto a su fundamentación teórica.

Por ello, ciertos capítulos esenciales de la matemática quedan sin abordarse o, en el mejor de los casos, son tratados con muy escasa profundidad. Sin duda, el más significativo es el relativo al lenguaje del álgebra y a sus aspectos operativos más simples, como la resolución de ecuaciones y sistemas, sin olvidar el estudio de los polinomios y de las fracciones algebraicas que, además de su innegable interés operativo, son esenciales para poder acometer, por ejemplo, el análisis, aunque sea elemental, de las gráficas de funciones (a no ser que dicho análisis sea absolutamente inconsistente y esté desprovisto de todo fundamento).

Hay por supuesto otras partes importantes de la matemática que echamos en falta pero, para no alargarnos, solamente mencionaremos la ausencia en la Enseñanza Secundaria Obligatoria de un estudio elemental del cálculo infinitesimal, pieza indispensable para interpretar la interdependencia de las magnitudes físicas, para lo que no bastan el álgebra y la geometría (como escribía Klein, «... las bases sobre las cuales reposa la explicación científica de la naturaleza son inteligibles sólo a aquellos que han aprendido, por lo menos, los elementos del cálculo»).

Aun tratando de entender que los contenidos matemáticos en la E.S.O. sean de un nivel tan elemental y con tan graves omisiones, con el objeto de poder garantizar su carácter de obligatoriedad y no diversidad mediante una igualación a la baja, lo que resulta absolutamente desestimable es que se piense que, en tan sólo dos cursos de bachillerato, se podrá recuperar lo que no se ha estudiado para ponerse en disposición de ingresar en carreras científicas o técnicas.

¿O es que es posible que un alumno que haya visto por vez primera las ecuaciones y los sistemas de dos incógnitas en la modalidad B del 4° curso —algo que hasta ahora se ha estudiado en 8° de

E.G.B.—, que haya trabajado tan poco con expresiones algebraicas, y que prácticamente desconozca los polinomios, adquiera una fluidez suficiente en la resolución de ecuaciones y en el manejo de las técnicas algebraicas elementales? ¿O que sea capaz de asimilar el concepto de número real casi de repente, noción que a nuestro juicio precisa de un lento aprendizaje que vaya madurándose a lo largo de varios años? O, por no extendernos en más detalles, ¿que pueda adquirir algunos conceptos formales del cálculo infinitesimal y trabajar con ellos prácticamente sólo en el nuevo curso de 2° de bachillerato, cuando debido a que su aprendizaje requiere, sin lugar a dudas, de una sedimentación y asimilación gradual, antes se iniciaba en 2° de B.U.P.?

Hay además en todo ello un agravante: una enseñanza de las matemáticas planteada fundamentalmente sobre la manipulación en ejemplos y aplicaciones triviales, con la consiguiente reducción al mínimo de la creación de estructuras mentales inherentes al razonamiento deductivo —cuya utilidad y alcance trasciende, por cierto, al ámbito de las matemáticas—, es una enseñanza de poca altura, e inadecuada para futuros científicos. En la concepción de esta Enseñanza Secundaria no creo que pueda hablarse por tanto, como se ha dicho, «de una preeminencia de las Ciencias sobre las Letras», sino de una cierta exaltación de la trivialidad y de la inconsistencia sobre el rigor y la auténtica cultura, al menos científica (y nos tememos que igual suceda con las humanidades, las letras y las artes).

Porque las matemáticas que necesitan, por ejemplo, los futuros físicos, matemáticos o ingenieros antes de entrar en la universidad, son en buena parte aburridas, y así hay que decirlo sin ambages, y precisan para su aprendizaje de un estudio tenaz y perseverante, pues el nivel matemático y de exigencia requerido para cursar dichas especialidades es necesariamente elevado.

Otra opinión distinta es la referente a los alumnos de los restantes bachilleratos, para los que el planteamiento actual de las matemáticas esté hecho probablemente con un carácter demasiado academicista, y sin tener en cuenta las aplicaciones que les puedan ser de utilidad; por ello pensamos que posiblemente sea positivo el enfoque que se da a las matemáticas en los nuevos bachilleratos de Artes, Humanidades y Ciencias Sociales. Pero incluso en estos casos, mantenemos una prudente reserva, ya que para poder aplicar las matemáticas es preciso que su conocimiento esté fundamentado sobre ciertas bases, mientras que en el proyecto que propone el Ministerio se habrán de hacer verdaderos equilibrios (ignoramos si con un balance finalmente positivo) para poder usar las matemáticas sin un determinado sustento teórico. A lo mejor también sucede que esa utilización de las matemáticas quede asimismo reducida a trivialidades desprovistas de un auténtico interés.

Como resumen de todo lo expuesto, nuestra opinión es que el nuevo bachillerato, en lo que concierne a la formación matemática de los alumnos, nos parece insuficiente, al menos para aquellos que piensen estudiar posteriormente ciencias o ingeniería, y que por tanto debería ampliarse. Ahora bien, ante el grave trastorno que supondría retrasar un año más la entrada en la Universidad, parece que la solución pasaría por que el Bachillerato comenzara antes; esto es, que al menos en 4° de E.S.O. hubiera una enseñanza diversificada —lo que no implicaría el dejar de ser obligatoria—, con opciones dirigidas a los diferentes bachilleratos, y quizás otra más generalista (orientada a los alumnos que pensaran abandonar la escuela a los dieciséis años o se encaminaran a un módulo de Formación Profesional). En las opciones que se correspondieran con los bachilleratos de las modalidades de Ciencias y de Tecnología, está claro que las matemáticas deberían tener una mayor presencia y profundidad, tratando de cubrir las carencias expuestas con anterioridad.

REFERENCIAS

BOUVIER, A. et al. (1986). *Didactique des Mathématiques*. París: Cedic/Nathan.

DUNHAM, W. (1992). *Viaje a través de los genios*. Madrid: Pirámide.

ETAYO, J. J. (1972). *Conceptos y métodos de la Matemática Moderna*. Barcelona: Vicens-Vives.

ETAYO, J. J. et al. (1995). *Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria*. Madrid: Rialp.

PERALTA, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*. Madrid: Huerga y Fierro.

PUIG ADAM, P. (1960). *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

SERVAIS, W. (1980). Humanizar la enseñanza de la Matemática. *Revista de Bachillerato*, Suplemento al nº 13, M.E.C., 3-22.

Resumen

En este artículo se hace un estudio sobre el currículo de matemáticas en la Educación Secundaria que establece la L.O.G.S.E., mediante un análisis de la metodología que se recomienda para su enseñanza, y de sus contenidos. Dicho análisis se extiende a otras reflexiones más generales sobre la enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave: L.O.G.S.E., metodología, contenidos.

Abstract

In this paper a study about the mathematics study programme in Secondary Education according to L.O.G.S.E. is made, by analysing its contents and teaching methods. Such analysis extend over other more general reflections about the mathematics teaching.

Key words: L.O.G.S.E. (Educational System General Order Law), methodology, contents.

Javier Peralta

Dpto. de Matemáticas

E.U. de Formación del Profesorado «Santa María»

Universidad Autónoma de Madrid

Ciudad Universitaria de Cantoblanco

28049 Madrid.