El teorema de Ptolomeo. Algunas contribuciones debidas a matemáticos españoles

Ricardo Moreno Castillo

Introducción

EL aislamiento científico en el que vivió España hasta muy entrado el siglo hizo que la mayor parte de la investigación matemática consistiera, bien en trabajar campos muy periféricos donde la erudición previa necesaria es mínima (como la geometría del triángulo), bien en darle vueltas a los teoremas clásicos y encontrar nuevas demostraciones.

Revolviendo en la hemeroteca antigua de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense y en los fondos de la Real Academia de Ciencias, encontré un número sorprendente de trabajos dedicados a estudiar las propiedades de los cuadriláteros inscriptibles en una circunferencia. La mayoría de ellos tratan sobre el teorema de Ptolomeo, unos dando demostraciones nuevas, otros deduciendo de él algunas fórmulas de geometría elemental. El presente artículo es un resumen de los más significativos, con unos breves datos biográficos de los autores.

Dada la escasez de material bibliográfico que nuestros matemáticos tenían a su alcance, no es imposible que algún resultado publicado en España ya lo hubiera sido fuera. Esto no sería en absoluto producto de un plagio, sino consecuencia casi inevitable de la soledad intelectual en la que se movían los científicos españoles hasta hace algo más de medio siglo.

Claudio Ptolomeo y su teorema

Poco sabemos de la vida de Ptolomeo, tan sólo que nació en Egipto alrededor del año 85 d. de C. y que residió en Alejandría, donde realizó sus estudios astronómicos. Su obra fundamental es un tratado de astronomía en trece libros, titulado *Sintaxis Matemática*, basado en observaciones propias y en la tradición astronómica de griegos y babilonios. Para distinguirla de otro grupo de tratados astronómicos debidos a diferentes autores, se referían a ella frecuentemente con el superlativo griego *megiste* (la más grande), y al colocar el artículo en la traducción árabe quedó *Almagesto*, nombre con la que se conoce desde entonces. El Occidente europeo tuvo las primeras noticias de él a través de la *Astronomía* de Boecio. La versión latina más difundida se debe a Gerardo de Cremona (1114-1187), quien utilizó la traducción al árabe que en el siglo IX había hecho al-Hayyay b. Yusuf a partir de un texto siríaco.

La contribución propiamente matemática de Ptolomeo anda dispersa entre sus escritos astronómicos. En el primer libro del *Almagesto* construye, con el fin de facilitar los cálculos trigonométricos, una tabla de las cuerdas de los ángulos centrales de la circunferencia (la idea de utilizar la semicuerda del ángulo doble, que hoy llamamos seno, aparecería por primera vez en un texto sánscrito del siglo V). Uno de los teoremas que usa en la elaboracion de su tabla, y que desde entonces se conoce como teorema de Ptolomeo, dice así: *En cualquier cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia siempre sucede que la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de las diagonales.* La demostración más conocida es la siguiente:

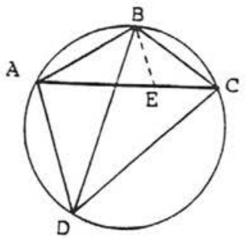

Figura 1

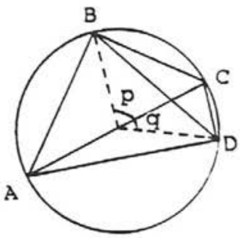

Figura 2

Trazamos desde B una recta de tal manera que los ángulos ABD y EBC sean iguales (ver figura 1). Claramente son semejantes las parejas de triángulos BCE y BDA, ABE y DBC. De cada una de estas semejanzas se deducen las igualdades siguientes:

$$AD\ BC = CE\ BD$$
$$AB\ DC = AE\ BD$$

que sumadas miembro a miembro dan lugar a:

$$AD\ BC + AB\ DC = (AE + EC)BD = AC\ BD,$$

que es lo que pretendíamos probar.

Si AC es un diámetro de la circunferencia y escribimos el teorema de Ptolomeo en función de los ángulos p y q (ver figura 2), llegamos a lo siguiente:

$$\text{cuerda de } (p+q) = DB = \frac{AD\ BC + AB\ DC}{AC} =$$

$$\frac{\text{cuerda}(180^\circ - q)\ \text{cuerda}(p) + \text{cuerda}(180^\circ - p)\ \text{cuerda}(q)}{\text{diámetro}}$$

Mediante esta fórmula y otras semejantes, y partiendo de ángulos cuyas cuerdas son fáciles de calcular, pudo elaborar Ptolomeo una tabla de las cuerdas de todos los arcos desde 1/2° hasta 180°, de medio grado en medio grado, y que es en esencia lo mismo que una tabla actual de senos desde 1/4° hasta 90° de cuarto de grado en cuarto de grado. No sabemos lo que los métodos de Ptolomeo deben a Hiparco de Nicea (de quien dice Teón de Alejandría que escribió un tratado en doce libros sobre las cuerdas del círculo), y en todo caso ignoramos la magnitud de la deuda. Lo cierto es que el *Almagesto* sobrevivió y su tabla de cuerdas fue una herramienta imprescindible para los astrónomos durante más de mil años.

Eduardo León y Ortiz

En 1877 fue publicado en la *Revista de la Sociedad de Profesores de Ciencias* un trabajo de Eduardo León y Ortiz, donde se deducen algunas consecuencias elementales del teorema de Ptolomeo. El profesor León y Ortiz había nacido en Valencia en 1846 y era licenciado en ciencias exactas. En el año de aparición de su artículo trabajaba como ayudante en el Observatorio Astronómico y Meteorológico de Madrid. Ese mismo año ganó la cátedra de álgebra superior y geometría de la Universidad de Gra-

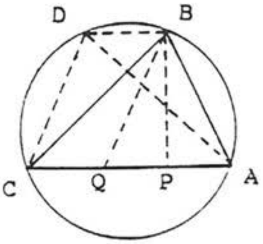

Figura 3

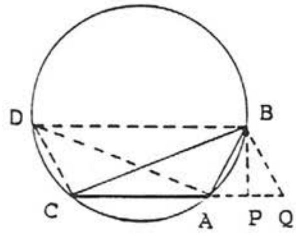

Figura 4

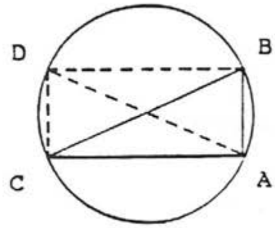

Figura 5

nada, al siguiente pasó a la de Valencia y a partir de 1882 fue catedrático de geodesia de la Universidad Central. Además de varios trabajos de investigación, publicó unos *Elementos de Mecánica* y tradujo el tratado de geodesia de Clarke.

Considera León y Ortiz en el citado artículo un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita, y supone en primer lugar que el ángulo A es agudo (figura 3). Trazamos desde B una paralela al lado AC, que corta a la circunferencia en el punto D. Como los triángulos ABC y CDA son iguales, el teorema de Ptolomeo da lugar a que:

$$BC^2 = BA^2 + CA\ DB.$$

Tirando desde B las rectas BQ (paralela a DC) y BP (perpendicular a CA), resulta:

$$DB = CQ = CA - 2AP.$$

Sustituyendo esta última igualdad en la anterior, tenemos lo siguiente:

$$BC^2 = BA^2 + CA^2 - 2CA\ AP,$$

que es la expresión de un clásico teorema: *En cualquier triángulo, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del producto de uno cualquiera de estos lados por la proyección del otro sobre él.*

Si el ángulo A es obtuso, un razonamiento muy parecido hecho sobre la figura 4 da lugar a esta otra igualdad:

$$BC^2 = BA^2 + CA^2 + 2CA\ AP,$$

que también es un teorema muy conocido: *En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más el doble del producto de uno cualquiera de estos lados por la proyección del otro sobre él.*

Si A es un ángulo recto, es muy fácil ver que el teorema de Ptolomeo da directamente el de Pitágoras (ver figura 5). Estos tres teoremas son a su vez casos particulares del teorema del coseno.

El demostrar estos teoremas mediante el de Ptolomeo tiene la ventaja de que ciertas proposiciones que normalmente se utilizan para demostrarlos, pueden ahora ser deducidas como corolarios suyos. Como ejemplo demuestra León y Ortiz el que la altura de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos que determina sobre la hipotenusa, y también el teorema según el cual para cada par de lados de un triángulo es constante el producto de la longitud de cualquiera de ellos por la proyección del otro sobre él.

Ignacio Beyens

Llamamos hoy fórmula de Herón a la expresión del área de un triángulo en función de sus lados: si p es el semiperímetro de un triángulo de lados a, b y c, su superficie es:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\,.$$

Se la conoce por este nombre porque aparece por primera vez en la *Dioptra* de Herón de Alejandría (de quien sólo tenemos datos inciertos, aunque es muy probable que viviera en esta ciudad en el siglo I de nuestra era). Hoy sabemos por fuentes árabes que la fórmula procede de Arquímedes, y si la encontramos en la *Dioptra* es posiblemente debido a una interpolación. En el siglo VII el matemático indú Brahmagupta descubrió una generalización del teorema de Herón válida para cuadriláteros inscriptibles y que es una de las más bellas consecuencias del teorema de Ptolomeo. La superficie de un cuadrilátero cíclico de lados a, b, c y d y semiperímetro p es:

$$S = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}\,.$$

La oscuridad de los textos impide saber si Brahmagupta era consciente de que su fórmula no era válida para cualquier cuadrilátero (Baskhara, otro matemático indú cinco siglos posterior, ignoraba esta limitación), pero sí sabía que haciendo d = 0 lo era para triángulos.

Una demostración del teorema de Brahmagupta apareció publicada en 1903 en la *Gaceta de Matemáticas Elementales* en un artículo firmado por Ignacio Beyens, de quien tan sólo puedo decir que por esas fechas era teniente coronel de ingenieros. Es un trabajo de divulgación, donde el autor da a conocer una demostración que había encontrado en algunos tratados alemanes y que le pareció poco conocida en España. No es pues una aportación original, con todo vamos a darla porque tiene un cierto interés.

Sea AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = m y BD = n. Desde B y D trazamos perpendiculares a la recta AC, que la cortan en los puntos P y Q respectivamente, y desde D trazamos una paralela a AC, que encuentra a la recta BP en el punto H (ver figura 6).

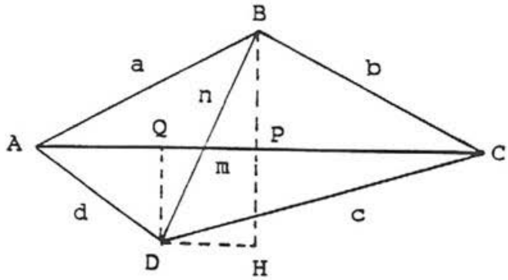

Figura 6

Claramente vemos que sucede lo siguiente:

$$S = \frac{1}{2}\,(BP + DQ)m = \frac{1}{2} BH\ m = \frac{1}{2} m \sqrt{n^2 - PQ^2}\,.$$

Suponiendo que P y Q son interiores al cuadrilátero (en caso contrario el razonamiento que viene a continuación sólo necesita una pequeña modificación), aplicamos a los triángulos ABC y ADC el primero de los teoremas demostrados en el apartado anterior:

$$b^2 = a^2 + m^2 - 2m\ AP,\ c^2 = d^2 + m^2 - 2m\ AQ.$$

Despejamos AP y BQ y restamos ordenadamente las expresiones así obtenidas:

$$PQ = AP - AQ = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2m} .$$

Sustituyendo este valor de PQ en la expresión a la que habíamos llegado para la superficie, y haciendo unas cuentas muy sencillas, tenemos que:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)\ (2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)} .$$

Esta fórmula vale para cualquier cuadrilátero. Si es inscriptible, veremos cómo se convierte en la de Brahmagupta. En efecto, sustituyendo (en virtud del teorema de Ptolomeo) mn por ac + bd, resulta:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{[(a + c)^2 - (b - d)^2]\,[(b + d^2 - (a - c)^2]} =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a + c + b - d)\,(a + c - b + d)\,(b + d + a - c) - (b + d - a + c)}$$

$$= \sqrt{(p - a)\,(p - b)\,(p - c)\,(p - d)} .$$

Alonso Thibinger

Alonso Thibinger fue un padre marianista de origen alsaciano, afincado desde muy joven en nuestro país. Durante su muy larga vida desempeñó diversos cargos, casi todos relacionados con la enseñanza, en distintas casas y colegios que su congregación tenía diseminados por España. Había nacido en el pueblo de Schletstadt en 1870, y a los ventiún años lo enviaron sus superiores al postulantado marianista de Escoriaza, en el País Vasco. En 1903 solicitó y obtuvo la nacionalidad española[1].

De todas las asignaturas que Thibinger impartió durante sus épocas de profesor, era la matemática su predilecta, aunque sus distintas ocupaciones dentro de la orden no le permitieron dedicarse a ella sino muy tangencialmente. Con todo, además de fama de excelente profesor, dejó algunos artículos de investigación publicados en diversas revistas matemáticas españolas. De algunos de ellos vamos a ocuparnos ahora.

En 1903, durante su etapa de Escoriaza, publicó don Alonso en la *Gaceta de Matemáticas Elementales* un trabajo titulado «Aplicaciones notables del teorema de Luchterhand», donde deduce la fórmula de Ptolomeo de un teorema que el profesor Luchterhand de Königsberg había publicado en el *Journal de Crelle* sesenta años antes. Dicho teorema afirma lo siguiente: *En todo cuadrilátero inscriptible, si se multiplica el cuadrado de la distancia de un vértice a un punto cualquiera P del plano, por el área del triángulo formado con los otros tres vértices, la suma de los productos referentes a dos triángulos que tienen por base una misma diagonal, es igual a la suma de los productos relativos a los dos triángulos cuya base común es la otra diagonal.* Dicho más brevemente (ver figura 7):

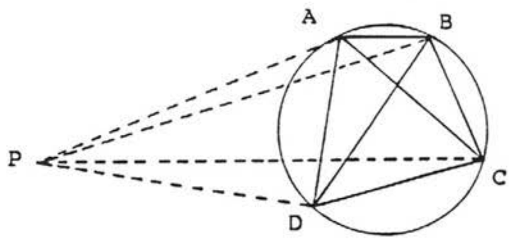

Figura 7

$$PA^2\,[BCD] + PC^2\,[ABD] = PB^2\,[ADC] + PD^2\,[ACB]$$

1 Este breve resumen biográfico procede de un libro escrito por Victoriano Mateo y que me facilitó don Abilio Fraile. A él y al director del Colegio del Pilar agradezco la amabilidad que me dispensaron cuando me acerqué a ellos en busca de datos sobre la vida de don Alonso.

(donde los corchetes significan la superficie del triángulo).

Ahora bien, el área de un triángulo es igual al producto de las longitudes de sus lados dividido por el doble del diámetro de la circunferencia circunscrita, por tanto el teorema de Luchterhand puede ser escrito de esta otra manera:

$$PA^2\, bcn + PC^2\, adn = PB^2\, cdm + PD^2\, abm.$$

Si colocamos el punto P en el vértice D, la última igualdad se convierte en esta otra:

$$d^2\, bcn + c^2\, adn = n^2\, cdm,$$

que simpiflicada por ncd se convierte en el teorema de Ptolomeo.

Si situamos ahora al punto P en el centro de la circunferencia circunscrita, llegamos a la fórmula siguiente:

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

que es la expresión de lo que algunos textos llaman el segundo teorema de Ptolomeo: *En todo cuadrilátero inscriptible, las diagonales son proporcionales a las sumas de los productos de los lados que parten de sus extremos.* De él se deducen fácilmente las fórmulas que dan el valor de la relación de dos lados opuestos:

$$\frac{a}{c} = \frac{bn - dm}{bm - dn}, \quad \frac{b}{d} = \frac{an - cm}{am - cn}.$$

En 1913 publicó Thibinger en la *Revista de la Sociedad Matemática Española* un segundo trabajo sobre el mismo tema. Repite en él las demostraciones de los teoremas de Ptolomeo a partir del de Luchterhand (quizás considerando la escasa difusión que había tenido la *Gaceta de Matemáticas Elementales*) y llega a nuevas fórmulas para el cuadrilátero inscriptible. Hablaremos tan sólo de una de ellas, la única que utiliza el teorema de Ptolomeo y que proporciona la superficie del cuadrilátero en función de los lados y del diámetro f de la circunferencia circunscrita. Consideramos las áreas de los triángulos que tienen por base las diagonales:

$$[ABC] = \frac{abm}{2f} \qquad [DAB] = \frac{dan}{2f}$$

$$[ACD] = \frac{dcm}{2f} \qquad [DCB] = \frac{cbn}{2f}$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades de la izquierda y las dos de la derecha, llegamos a estas otras dos:

$$[ABCD] = \frac{m(ab + cd)}{2f}, \quad [ABCD] = \frac{n(ad + cb)}{2f},$$

que multiplicadas miembro a miembro dan lugar a esta otra:

$$[ABCD]^2 = \frac{mn\,(ab + cd)\,(ad + cb)}{4f^2},$$

Sustituyendo mn por ac + bd y haciendo raíces cuadradas en ambos miembros llegamos a la fórmula buscada:

$$[ABCD] = \frac{\sqrt{(ac + bd)\,(ab + cd)\,(ad + cb)}}{2f}.$$

No es tan bonita como la de Brahmagupta, ni tan útil, porque necesita de más datos, pero también es curiosa. Además generaliza la fórmula para la superficie de un triángulo que hemos usado en su demostración (aunque no queda claro si don Alonso se daba cuenta de esto). En efecto, haciendo D = C (y por tanto d = 0):

$$[ABC] = \frac{\sqrt{acabcb}}{2f} = \frac{abc}{2f}.$$

Augusto Krahe

Augusto Krahe nació en Sevilla el año 1867, hijo de un alemán afincado en España. Comenzó la carrera de ingeniero de caminos, que abandonó antes de acabar por su discrepancia con algunos profesores. Con un grupo de amigos fundó el periódico *Madrid Científico,* en un intento de renovar el ambiente intelectual español, y para vivir se dedicó a la enseñanza privada. Cuando una reforma de los planes académicos creó la sección de Exactas dentro de la Facultad de Ciencias, retomó los estudios y obtuvo el grado de licenciado. En 1906 ganó la cátedra de geometría descriptiva de la Escuela Industrial de Madrid, que desempeñó hasta 1930, año en que murió.

Publicó numerosos artículos en revistas españolas y extranjeras. En el último de ellos, aparecido en la *Revista Matemática Hispano Americana* en 1926, da una demostración del teorema de Ptolomeo haciendo uso de los números complejos. Considera para ello los cuatro vértices A, B, C y D de un cuadrilátero convexo colocados sobre el plano de Gauss, de modo que representen cuatro números complejos z_1, z_2, z_3 y z_4.

Desarrollando el primer miembro de la identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

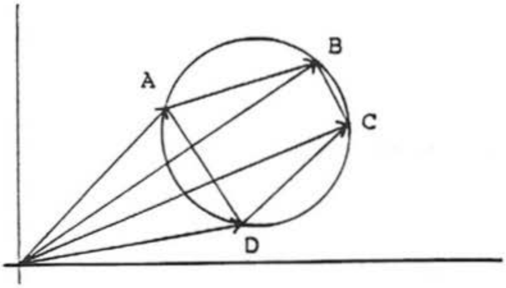

Figura 8

llegamos a esta otra:

$$(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_4 - z_1)(z_3 - z_2) = (z_3 - z_1)(z_4 - z_2).$$

Como la suma de los módulos de los sumandos es mayor o igual que el módulo de la suma, tenemos que:

$$AB\ CD + BC\ AD \geq AC\ BD,$$

lo que significa que en cualquier cuadrilátero convexo la suma de los productos de los pares de lados opuestos es mayor o igual que el producto de las diagonales. La igualdad se da cuando la diferencia de los argumentos de los sumandos del primer miembro sea múltiplo de 2π, y esto pasa si el cuadrilátero es inscriptible. En efecto, en ese caso sucede lo siguiente (ver figura 8):

$$\text{argumento } AB - \text{argumento } AD = \hat{A},$$
$$\text{argumento } BC - \text{argumento } CD =$$
$$\pi + \text{argumento } CB - \text{argumento } CD =$$
$$\pi + C = \pi + (\hat{A} - \pi) = \hat{A},$$

con lo cual ya tenemos que:

argumento AB + argumento CD = argumento BC + argumento AD.

Entonces la desigualdad se convierte en igualdad y llegamos al teorema de Ptolomeo.

Algunos trabajos más

Otros trabajos se publicaron en España sobre el cuadrilátero inscriptible, pero no basados en el teorema de Ptolomeo. En 1913 apareció un artículo de Alonso Thibinger en la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, en el que deduce algunas propiedades del cuadrilátero cíclico partiendo de consideraciones proyectivas. En 1944 publicó Rogelio Masip en la revista *Matemática Elemental* un trabajo donde demuestra varias fórmulas de las distancias entre los elementos del cuadrilátero inscriptible y llega, mediante razonamientos trigonométricos, a la misma fórmula para la superficie a la que había llegado Thibinger. En el mismo año y la misma revista demostró E. Pajares la fórmula de la relación entre las diagonales del cuadrilátero inscriptible. En un artículo publicado en 1948, también en *Matemática Elemental*, y firmado por José Mª Orts, se relacionan las condiciones para que cuatro puntos estén en una circunferencia con las condiciones de equilibrio de un cierto paraboloide de revolución.

BIBLIOGRAFÍA

BEYENS, I. (1903). Sobre el área de un cuadrilátero. *Gaceta de Matemáticas Elementales, tomo I*: 205-206.

BOYER, C. (1992). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

KRAHE, A. (1926). Sobre el teorema de Ptolomeo. *Revista Matemática Hispano-Americana, 2ª serie, tomo I*: 147.

LEON Y ORTIZ, E. (1877). Del teorema de Ptolomeo y alguno de sus corolarios. *Revista de la Sociedad de Profesores de Ciencias, tomo I*: 87-92.

LORENTE DE NO, F. (1931). Don Augusto Krahe. *Revista Matemática Hispano-Americana, 2ª serie, tomo VI*: 15-32.

LUCHTERHAND, (1842). Über die Bedingung, dass fünf Puncte auf der Oberfläche einer Kugel liegen. *Journal de Crelle, tomo XXIII*: 375-378.

MASIP, R. (1944). Cuadrilátero convexo inscriptible. *Matemática Elemental, 4ª serie, tomo IV*: 294-302.

MATEO, V. (1973). *Don Alonso Thibinger, pensador y pedagogo*. Madrid: Ediciones S.M.

OCTAVIO DE TOLEDO, L. (1914). Don Eduardo León y Ortiz. *Revista de la Sociedad Matemática Española, tomo IV*: 1-5.

ORTS, J. Mª, (1948). Sobre el pentágono inscriptible. *Matemática Elemental, 4ª serie, tomo VIII*: 10-12.

PAJARES, E. (1944). Nota de geometría elemental. *Matemática Elemental, 4ª serie, tomo IV*: 303-304.

REY PASTOR, J. y BABINI, J. (1986). *Historia de la matemática*. Barcelona: Gedisa.

THIBINGER, A. (1903). Aplicaciones notables del teorema de Luchterhand. *Gaceta de Matemáticas elementales», tomo I*: 154-155.

THIBINGER, A. (1913). Sobre una clase de cuadriláteros. *Revista de la Sociedad Matemática Española, tomo III*: 33-41.

THIBINGER, A. (1914). Estudio de algunas propiedades del cuadrilátero inscriptible. *Revista de la Sociedad Matemática Española, tomo III*: 160-167.

VERNET, J. (1978). *La cultura hispanoárabe en Oriente y Occidente*. Barcelona: Ariel.

Resumen

Este artículo trata sobre la historia del teorema de Ptolomeo en España y el interés que despertó en varios matemáticos españoles. Algunos de ellos, como León y Ortiz, Beyens, Thibinger y Krahe, trabajaron sobre él encontrando nuevas demostraciones, deduciendo corolarios o divulgando resultados poco conocidos.

Palabras clave: historia, matemáticas, Ptolomeo.

Abstract

This article is about the History of Ptolomeo's theorem in Spain and the interest it aroused in various Spanish mathematicians. Some of them, like León y Ortiz, Beyens, Thibinger y Krahe, worked on it finding new demonstrations, deducing new corollaries or spreading some of its results.

Key words: history, mathematics, Ptolomeo.

Ricardo Moreno Castillo
C/ Lope de Rueda, 29 - 2º centro
28009 MADRID - ESPAÑA.