

La aritmética árabe durante la Edad Media. Antiguos problemas aritméticos árabes

1. Introducción

Concepción Romo Santos

ARABIA, la cuna del Islam, se encuentra situada en una gran península. Durante la segunda mitad del siglo VI, Arabia estaba habitada por beduinos, que no sabían leer ni escribir, y en este marco sociopolítico surgió el profeta Mahoma, que nació en la Meca hacia el año 570. Mahoma predicó y enseñó su doctrina en la Meca, pero el 622, viendo su vida amenazada por un complot, aceptó una invitación para trasladarse a Yatrib, más tarde denominada Medina. Esta «huida», conocida como la Hégira, señala el comienzo de la Era Mahometana, que iba a ejercer durante siglos una poderosa influencia en el desarrollo de la matemática.

Mahoma se convirtió en un líder militar a la vez que religioso y diez años más tarde había conseguido formar un estado mahometano cuyo centro era la Meca, y en el que los judíos y los cristianos, que eran también monoteístas, gozaban de protección y de libertad de culto. En el año 632, mientras planeaba atacar el Imperio Bizantino, murió Mahoma en Medina; esta muerte repentina no logró impedir la expansión del Estado islámico apenas fundado, ya que sus seguidores invadieron los territorios fronterizos con una rapidez inusitada. En unos pocos años cayeron en poder de los conquistadores Damasco,

Jerusalén y la mayor parte del valle mesopotámico, y el 641 fue capturada Alejandría, que había

sido durante casi mil años el centro matemático del mundo.

Durante más de un siglo los conquistadores árabes lucharon entre sí y con sus enemigos, hasta que hacia el año 750 el espíritu guerrero cedió al fin. Por esta misma época surgió un cisma entre los árabes de Occidente que ocupaban España y Marruecos y los árabes del Oriente que tenían su capital en Bagdad. La unidad del mundo era más económica y religiosa que política. Los árabes asimilaron la cultura de las civilizaciones que habían invadido.

En este trabajo estudiaremos los principales avances aritméticos árabes durante la Edad Media y resolveremos también algunos antiguos problemas aritméticos árabes.

2. Al-Khuwarizmi

Durante el primer siglo del Imperio Musulmán no se produjo ningún desarrollo científico, pero en la segunda mitad del siglo VIII fueron llamados a Bagdad sabios procedentes de Siria, Irán y Mesopotamia, incluidos entre ellos judíos y cristianos nestorianos; bajo los califatos de los tres gran-

des protectores abbasíes de la cultura, Al-Mansur, Haroun Al-Raschid y Al-Mamún, se convirtió Bagdad en una nueva Alejandría. Durante el reinado del segundo de estos califas, conocido sobre todo por los cuentos de «Las mil y una noches», se tradujo al árabe parte de la obra de Euclides, pero cuando los árabes dieron rienda suelta a su pasión por las traducciones fue durante el califato de Al-Mamún (809-833). Se dice que el califa tuvo un sueño en el que se le apareció Aristóteles, y en consecuencia Al-Mamún decidió hacer traducir al árabe todas las obras griegas que se tuvieran a mano, incluido el *Almagesto* de Ptolomeo y una versión completa al fin de los *Elementos* de Euclides.

Al-Mamún fue quien fundó en Bagdad la «Casa de la Sabiduría» comparable al antiguo Museo de Alejandría. Entre los miembros de esta especie de Universidad estaba un matemático y astrónomo, Mohamed ibn-Musa Al-Khuwarizmi. Este matemático que debió morir algo antes del año 850, además de tablas astronómicas y tratados sobre el astrolabio y el reloj de sol, escribió Al-Khuwarizmi dos libros sobre aritmética y álgebra. El primero de ellos nos ha llegado sólo a través de una copia única de una traducción latina con el título «Libro de la Adición y la Sustracción a partir del cálculo de los hindús» de la cual el original árabe se ha perdido. En esta obra, que estaba basada presumiblemente en una traducción árabe de Brahmagupta, daba Al-Khuwarizmi una exposición tan completa del sistema de numeración hindú, que es él probablemente el responsable de la extendida aunque falsa impresión de que nuestro sistema de numeración es de origen árabe.

Al-Khuwarizmi a través de su obra «Al-jabr wal mugabalah» nos ha transmitido la palabra álgebra que se deriva de este título, cosa natural si se tiene en cuenta que fue de este libro del que apren-

dió más tarde Europa la rama de la matemática que lleva ese nombre. El Aljabr viene a estar, más próxima al álgebra elemental moderna que las obras de Diofanto o de Brahmagupta, ya que este libro no trata de difíciles problemas de análisis indeterminado, sino de la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, especialmente de las de segundo grado. El Al-jabr nos ha llegado en dos versiones, la árabe y una traducción latina. La palabra árabe «al-jabr» significa transferencia de términos al otro miembro de una ecuación y «mugabalah» cancelación de términos iguales en ambos miembros. La palabra árabe «aljabr» se convirtió en álgebra al transcribirla al latín.

3. La aritmética árabe

3.1. El sistema decimal

Los musulmanes fueron los primeros en escribir los números como lo hacemos ahora. Si bien podemos considerarnos herederos de los griegos en lo que concierne a la Geometría, podemos decir que buena parte del legado de los árabes es nuestra Aritmética.

La Aritmética de Al-Khuwarizmi es la primera obra conocida en la que el sistema decimal y las operaciones efectuadas haciendo uso del mismo son objeto de una atención especial. El título de la obra es «Libro de la Adición y la Sustracción a partir del cálculo de los hindús». Sus primeras frases, tras las rituales alabanzas a Dios, propias de aquellos tiempos son: «... hemos decidido exponer la forma de contar de los hindús con la ayuda de IX caracteres y enseñar como, gracias a su simplicidad y concisión, estos caracteres permiten expresar todos los números».

Tras explicar con detalle el sistema decimal de

numeración mediante las cifras usadas en la India, junto con un pequeño círculo semejante al cero, da las normas que permiten pronunciar los diferentes números y define los conceptos de unidad, decena, centena, etc.

A modo de ejemplo, propone el número:

1 180 703 051 492 863

que lee: un millar de millar de millar de millar de millar (cinco veces) y ciento ochenta millares de millar de millar de millar (cuatro veces) más setecientos tres millares de millar de millar (tres veces) y cincuenta y un millares de millar (dos veces) y cuatrocientos noventa y dos millares y ochocientos sesenta y tres.

Describe a continuación las operaciones de cálculo. Veamos, el ejemplo que propone para la multiplicación de 2326 por 214

2326	→	2326
214		428
		428326
428326		428326
214	→	642
		492226
492226		492226
214	→	428
		496486
496486		496486
214	→	1284
		497764
497764		

Análogamente, la división de 48468 entre 324 se efectúa como sigue

1		
46468		
324		
1		14
14068	→	14068
324		324
		14
		143
		1108
	→	1108
		324
		324
		143
		136
		324

La numeración de posición se fue imponiendo con gran lentitud. Una gran parte de la población seguía utilizando el sistema estrictamente literal. Así están escritos los números en el «Libro de la Aritmética necesaria a Escribas y Comerciantes», escrito por Abù-l-Wafà entre los años 961 y 976, y lo mismo ocurre al célebre libro de Aritmética de Al-Karagì, «Libro que resulta suficiente para la ciencia de la Aritmética», escrito entre finales del siglo X y comienzos del XI.

Unos 150 años después de que Al-Khuwarizmi escribiera su libro de Aritmética nació, en la región al Sur del Mar Caspio, Kusair ibn Labban al-Gili. Su tratado de Aritmética, «Principios del Cálculo de los Hindús» se convirtió en uno de los libros de texto de Aritmética más importantes en el mundo islámico.

Este libro de al-Gili es una breve pero excelen-

te introducción a la Aritmética y explica el sistema decimal de numeración.

3.2. Las fracciones decimales

En la actualidad, para representar el resultado de la fracción restante de una división, se usan fracciones decimales exclusivamente, y no las fracciones sexagesimales como era habitual en el mundo islámico. Una evidencia de esta afirmación la podemos encontrar en el «Tratado de Aritmética hindú», de Al-Uglidisi, escrito en Damasco durante los años 952-953. El nombre de Al-Uglidisi indica que el autor se dedicaba a copiar manuscritos de Euclides, pero aparte de este detalle, no se conoce nada más de su vida, pese a que parece ser el primer hombre que utilizó las fracciones decimales con la ayuda de un punto (o una coma), y por lo tanto, fue pionero en la escritura de los números tal como lo hacemos ahora. Hagamos notar, sin embargo, que el propio Al-Uglidisi dice explícitamente en el prólogo de su obra que se había tomado la molestia de recopilar los mejores métodos de los autores que le precedieron. Esto induce a poner en duda la paternidad de Al-Uglidisi respecto de las fracciones decimales, pero la ausencia total de las mismas en las diferentes fuentes hindúes indican con una seguridad casi absoluta que las fracciones decimales son un descubrimiento de la Matemática del mundo Islámico.

Al cabo de algo menos de un siglo, otro autor musulmán, Abū Mansur al-Baghdadi, usaba también fracciones decimales para calcular décimas partes de una cantidad.

Dos siglos más tarde en los escritos de al-Samawal en 1172 se introducen las fracciones decimales como parte de un método general de aproxi-

mación de números con la precisión que se desee y dentro del contexto de la división y la extracción de raíces cuadradas.

A comienzos del siglo XV las fracciones decimales reciben un nombre propio y un tratamiento sistemático en la obra de Jamshid al-Kashi en la que, por ejemplo, se multiplican dichas fracciones exactamente igual que como lo hacemos en la actualidad. También en el siglo XV, un texto Bizantino de Aritmética describe como «turco» (es decir, procedente del mundo islámico) el método de representar

$$153\frac{1}{2} \text{ y } 16\frac{1}{4}$$

por

$$153'5 \text{ y } 16'25$$

respectivamente, y su producto como 2494'375.

4. Antiguos problemas aritméticos árabes

Propondremos una serie de problemas recreativos, enmarcados en la historia de Europa durante la dominación árabe.

Problema 1. Agrimensura nazarí

Abelardo Tomadatos estudia una escritura donde se refiere cómo los Reyes Católicos, tras la conquista de Granada, repartieron su vega entre los caballeros que les acompañaron en la lucha. Al margen del pergamino alguien efectuó una división de la superficie de la tierra (medida en fanegas nazaríes) entre el número de caballeros, para determinar el lote que correspondía a cada uno.

Desgraciadamente, la última empleada para la

[illegible]

Solución

El último sustraendo terminaría también en 5 ó en 0, y ya hemos visto que no es así. Luego este es 996 ó 998.

El último sustraendo es cinco veces 996 ó 998 (o sea, 4.980 ó 4.990). Siendo su penúltima cifra un 8, sólo es posible 4.980.

$$\begin{array}{r}
 9970050138 \overline{) 996} \\
 \underline{996} \\
 1005 \\
 \underline{996} \\
 9013 \\
 \underline{8964} \\
 4980 \\
 \underline{4980} \\
 0
 \end{array}$$

Zoraida, la bella hija de Muhammad I tenía muchos pretendientes. Pero ella no deseaba casarse con un príncipe guapo o rico. Quería por esposo a un hombre inteligente. Por ello los pretendientes fueron examinados. Los que no superaban el examen eran rechazados y volvían tristes a sus tierras. No hubo forma de desempatar entre Alí, Abdulá y Yaser. Los tres eran tan inteligentes que pasaban con éxito todas las pruebas. Un anciano derviche, propuso la siguiente manera de seleccionar al esposo de Zoraida. Pidió cinco discos, dos blancos y tres rojos. Luego habló así a los príncipes:

El primero que quiera adivinar el color de su disco, verá la espalda de sus dos compañeros. Si no acertase, se marchará y el segundo para adivinar podrá ver el disco que tiene su tercer compañero. Si no acertase, el tercer príncipe deberá adivinar sin haber visto nada. Allí quiso ser el primero. Después de observar los discos de sus compañeros, dijo en voz

baja al derviche el color de su disco. El derviche movió negativamente la cabeza y Alí se marchó triste a su patria. Yaser pidió ser el siguiente. Solamente podía ver el disco de Abdulá. Tampoco acertó y se retiró con pesadumbre. Finalmente, Abdulá, sin ver nada, dijo al derviche el color de su disco. ¡Había acertado! Se casó con Zoraida, fueron felices...

PREGUNTA: ¿Qué colores pudo ver Alí en los discos de sus dos compañeros?

¿De qué color era el disco de Abdulá?

Solución

Si Alí hubiera visto dos discos blancos, hubiera sabido que tenía un disco rojo. Luego Alí no vio dos discos blancos; vio, o un disco rojo y uno blanco o dos discos rojos.

Yaser era inteligente y supuso el razonamiento de Alí. Si hubiera visto un disco blanco, hubiera adivinado enseguida que el suyo era rojo. Luego vio un disco rojo.

Abdulá, que comprendió los razonamientos de Alí y Yaser dedujo enseguida que su disco era rojo.

Problema 3. Abdulá, el vendedor de seda

Abdulá había traído desde el Oriente a Madrid unas preciosas piezas de seda. Abdulá hizo este trato con su criado Alí:

Si vendo la seda por 100 dinares, te pagaré 20 en compensación por los servicios que me has prestado. Si la vendiera por 200, Alí sea loado si así fuere, sería aún más generoso y te daría 30 dinares.

Sucedió que Abdulá vendió su preciosa seda por 140 dinares. Entonces habló así a su criado:

— Te prometí que si vendía la seda por 200 dinares te pagaría 30. Esto es, por cada 20 dinares (la décima parte de 200) 3 dinares (décima parte de 30). Como la he vendido por 140 dinares (7 veces 20) te pagaré 21 dinares (7 veces 3).

Alí no estaba de acuerdo:

— Me prometiste que si vendías la seda por 100 dinares me pagarías 20. Esto es, por cada diez dinares (décima parte de 100) 2 dinares (décima parte de 20). Has hecho la venta por 140 dinares (14 veces 10); debes pagarme 28 dinares (14 veces 2).

¿Cuántos dinares debe pagar Abdulá a Alí?

Solución

Abdulá debía haber pagado 20 dinares por los 100 primeros (el 20%) y 4 dinares por los 40 últimos (el 10%). En total 24 dinares.

Problema 4. Mustafá, el vendedor de perlas

Era un comerciante honrado, que disfrutaba con la belleza de su mercancía. En una ocasión compró una colección de ocho magníficas perlas. Eran iguales en tamaño, forma, brillo, color... menos en el peso. Siete pesaban lo mismo y la restante era un poco más ligera. Mustafá hubiera podido «colarla» y venderla al mismo precio que las demás, pero ya sabemos que era muy honrado.

Para averiguar cual era la perla ligera, disponía de una sencilla balanza de dos platillos.

a) ¿Podríamos ayudarle a decidir cual era la perla ligera? ¿Cuántas veces hemos utilizado la balanza para ello?

b) Más difícil: Vamos a ayudarle a detectar la perla ligera usando la balanza solamente dos veces.

Solución

a) Se puede hacer tomándolas de una en una, hasta que un platillo quede más alto. Ese platillo contiene la perla ligera.

b) Se hacen con las ocho perlas tres grupos, dos de tres perlas cada uno y uno de dos perlas. Se colocan en cada platillo de la balanza un grupo de tres perlas. Pueden ocurrir dos situaciones.

1) La balanza queda en equilibrio. Entonces la

perla ligera es una de las dos que no se han colocado en la balanza. Poniendo una de esas perlas en cada platillo, uno de ellos quedará más elevado: es el que contiene la perla ligera.

2) La balanza no está en equilibrio. Entonces la perla ligera está en el grupo de tres situado en el platillo de la balanza más alto. Se coloca una perla de ese grupo en cada platillo. Si la balanza está en equilibrio, la perla ligera es la que no se ha puesto en la balanza. Si un platillo está más elevado, ese platillo contiene la perla ligera.

Problema 5. Doña Leoncia la salinera

En tiempos de la dominación árabe, Madrid poseía las salinas de Espartinas, pero además hubo una mujer y en aquellos tiempos no era muy frecuente la mujer empresaria, dedicada al negocio de la sal. Esa fue Doña Leoncia.

Doña Leoncia era una buena comerciante, pero tenía un defecto: le gustaba mucho el dinero que (honradamente) ganaba con su sal. Guardaba en una caja unos ducados de oro y por la noche los contaba amorosamente. Si los colocaba en montones de tres, le quedaba un ducado sin colocar. Lo mismo le ocu-

rría cuando los colocaba en montones de cuatro y en montones de cinco. Cuando los colocaba de siete en siete no sobraba ningún ducado.

a) ¿Qué ocurría cuando los colocaba de dos en dos? ¿Y cuando hacía montones de seis?

b) ¿Cuál era el menor número de ducados que podía tener Doña Leoncia? (Había quien decía que tenía 301 ducados).

Solución

a) Cuando colocaba las monedas de dos en dos, le sobraba un ducado porque el número de monedas era un múltiplo de cuatro más uno. También le sobraba un ducado al colocarlos de seis en seis porque el número de monedas era igual a uno más un múltiplo de tres y de cuatro.

b) El número de monedas menos uno, debía ser múltiplo común de tres, cuatro y cinco; o sea múltiplo del mínimo común múltiplo de 3, 4 y 5: 60. De entre los múltiplos comunes a 60 (más 1) hay que tomar el que sea divisible por 7: 61, 121, 181, 241, 301. 301 es el menor número que cumple esas condiciones. Luego Doña Leoncia tenía por lo menos 301 ducados.

BIBLIOGRAFÍA

ALBAIGES OLIVART, JOSÉ M. (1981). *¿Se atreve Vd. con ellos?* Barcelona-México: Marcombo. Boixareu Editores.

BOYER CARL, B. *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

ROMO, C.; BUJANDA, P. (1991). *Historia de*

Madrid a través de las Matemáticas. Madrid: Servicio de Educación. Ayuntamiento de Madrid.

TARRES FREIXENET, J. (1994). *La matemática árabe*. Curso de Historia de la Matemática. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Resumen:

En este trabajo estudiaremos los principales avances aritméticos árabes durante la Edad Media y resolveremos también algunos antiguos problemas aritméticos árabes.

Palabras clave: Álgebra, Aritmética, Historia de las Matemáticas, Numerales árabes, Problemas Recreativos.

Abstract:

In this work we study the mathematics arabian and we resolve the recreative problems.

Key words: Algebra, Arithmetic, Arabic numerals, history of mathematics, the recreative problems.

Concepción Romo Santos
Departamento de Álgebra
Ciudad Universitaria
Universidad Complutense de Madrid
28040 MADRID