

El uso de la historia de las matemáticas en clase: el ejemplo de la cartografía y la navegación

Introducción

Bartolomé Barceló

LAS Matemáticas ocupan un lugar principal en la escuela. Los estudiantes consagran a las Matemáticas prácticamente todos los años de su enseñanza primaria y secundaria. Por otro lado, esta asignatura ha demostrado ser un obstáculo para que muchos estudiantes pudiesen completar sus estudios en la escuela. Hace tan sólo unos días, una madre de familia me preguntaba por qué hay tantas Matemáticas en los planes de estudio, al menos una por año, y si no se podrían sustituir por otro tipo de enseñanzas. Su pregunta era más bien una queja, porque a continuación afirmaba que eran motivo de fracaso para muchos estudiantes y que aún en el caso de un estudiante provechoso, éstas eran algo inútiles por ser un conjunto de técnicas y simbolismos que luego se olvidaban fácilmente. Su observación es interesante porque es el tipo de cuestión que se plantean muchos padres e incluso educadores.

La respuesta a mi entender es clara. Así como lo puedan ser la Historia o la Literatura, las Matemáticas forman por una lado una parte importante de nuestra cultura y por otro son una de las pocas asignaturas que obligan a pensar, siendo ello como un entrenamiento mental. Si se toma como adecuada

do este punto de vista entonces entonces está también más o menos claro como proseguir.

Han formado parte de la cultura como un desafío al intelecto humano. Ejemplos hay muchos, pongamos unos cuantos. El descubrimiento de los números irracionales, que echó abajo toda una filosofía del mundo e hizo obsoletos muchos de los razonamientos geométricos de la Antigüedad. Los problemas clásicos de los griegos de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo han sido una guía y estímulo constante para sabios de todas las épocas hasta quizás finales del siglo pasado, cuando F. Lindemann demostró la trascendencia del número π en 1882. Los turbulentos episodios renacentistas de Tartaglia y Cardano referentes a la resolución de las cúbicas, etcétera, etcétera. Ahora bien, ¿Contienen nuestros planes de estudio estos hechos? Yo diría más bien que no. Aunque tampoco ello es esencial, ya que el educador o profesor de Matemáticas los puede ir incorporando como ejemplos o anécdotas que vayan enriqueciendo el proseguir del día a día del programa de la asignatura. El plan de Matemáticas de la educación primaria o secundaria debería satisfacer las necesidades de todos los alumnos, contribuir a la formación del estudiante en general y ofrecer preparación

profesional a quienes usarán más tarde las Matemáticas, como los ingenieros y científicos ya que son la base de nuestra civilización tecnológica, o también por ejemplo para las Ciencias Económicas y Sociales, que pueden hacer progresivamente más uso de las Matemáticas en el futuro.

Sobre el hecho de que las Matemáticas son una de las pocas asignaturas que obligan a pensar no vamos a hacer ningún comentario, ya que parece fuera de toda duda el bien que hace en la formación de una persona, en nuestro caso de un estudiante, el tener una mente abierta, clara y juiciosa capaz de afrontar los problemas que vayan apareciendo a lo largo de la vida.

Uno de los defectos que más se observan en los libros de texto de las Matemáticas es el excesivo uso del simbolismo y las nomenclaturas. Este verano pasado mantuve una conversación con una profesora de escuela en la especialidad de Matemáticas, en la que me decía que las Matemáticas son sólo símbolos y su manejo. Ni que decir tiene que me apenó seriamente y me dejó preocupado el hecho de que una educadora pueda pensar así. Morris Kline, en su libro *El fracaso de la matemática moderna* expone las siguientes reflexiones que suscribimos plenamente: «El simbolismo puede servir para tres fines. Puede comunicar eficazmente las ideas, puede ocultar las ideas y puede ocultar la ausencia de ideas. A menudo parece como si algunos de los textos de Matemáticas usasen el simbolismo para ocultar la pobreza de ideas. En otros casos, el propósito de su simbolismo parece ser el de hacer inescrutable lo evidente y evitar así su comprensión ... Las ideas y los argumentos con los que trabaja un matemático tienen una realidad física, intuitiva y geométrica mucho antes de ser expresados mediante símbolos. Vemos entonces que los símbolos de las Matemáti-

cas, como las notas musicales, son simplemente una escritura artificial sin significado intrínseco.»

A lo largo de los últimas décadas ha habido numerosos intentos en reformar y cambiar los planes de estudio para hacerlos más interesantes y más adecuados para la formación de los estudiantes. Uno de ellos fue él, a nuestro juicio nefasto, experimento educativo que se llamó no muy apropiadamente, la matemática moderna. Otras corrientes más actuales han intentado utilizar las calculadoras y las nuevas tecnologías como herramienta importante en la enseñanza matemática. Probablemente de un poco igual cuales sean los contenidos de los planes de estudio. Lo realmente importante es saber transmitir el buen gusto y el placer que hay detrás de las buenas ideas matemáticas. Esto es porque más que un conjunto de conocimientos, es más importante tener una mente preparada para saber afrontar los problemas. En este sentido hay textos que podríamos denominar ya clásicos, escritos por unos de los más importantes matemáticos y profesores de este siglo, que deberían ser un modelo para todos los educadores. Por ejemplo *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* de Félix Klein, ¿Qué es la Matemática? de R. Courant y H. Robbins, o los escritos del español y luego exiliado en Argentina, Julio Rey Pastor. No estaría demás tampoco echar la vista atrás y recordar que el plan de la escuela de los Pitagóricos, el *Quadrivium*, consistía en el estudio de la Aritmética, Geometría, Música y Astronomía, a los que en la Edad Media se añadió el *Trivium* consistente en Gramática, Lógica y Retórica. Estas eran las siete artes liberales que se consideraron como los conocimientos que debía tener toda persona educada.

Una propuesta para mejorar la calidad de nuestra enseñanza, es usar la Historia de las Matemáticas. Se pueden hacer comentarios históricos, incor-

porar anécdotas y adaptar los ejemplos y ejercicios que usemos con problemas que hayan tenido cierto interés o relevancia histórica. De este modo, además de hacer amena e interesante la clase afrontamos directamente el objetivo de aprender Matemáticas dando al mismo tiempo una formación cultural. Se podría organizar algún seminario o grupos de trabajo de acuerdo con este fin. Una posible lista de temas es la que sigue:

1. La construcción de los polígonos regulares con regla y compás.
2. La sucesión de Fibonacci y la sección áurea.
3. Tartaglia, Cardano y la controversia de la cúbica.
4. Arquímedes y su método. Sobre la esfera y el cilindro.
5. La cicloide.
6. Mapas y proyecciones de mapas.
7. La espiral logarítmica.
8. La historia del número π .
9. El problema de la braquistocrona.
10. El Teorema de Morley.
11. Como transformar movimiento circular en rectilíneo. El «linkage» de Peaucellier.
12. Huygens y el péndulo cicloidal.
13. Las matemáticas y la música.
14. La controversia de la cuerda vibrante.

Las Matemáticas de la cartografía y la navegación

Uno de los temas más fascinantes, en parte popularmente desconocido, relacionados con las Matemáticas es la historia de la cartografía y de la navegación. Vamos a exponer sin extendernos demasiado las principales ideas de esta relación.

Nuestro relato empieza con Pitágoras de Samos (560-480 a.C.). Como es sabido Pitágoras se estableció en Crotona, una ciudad al sur de Italia, y allí fundó una sociedad secreta religiosa y filosófica. No sólo descubrió su famoso Teorema, sino que estableció una mística relación entre los números naturales y los movimientos de los planetas y las armonías musicales. Pitágoras jugaba con piedras a orillas del mar, y de sus disposiciones geométricas demostraba teoremas. Utilizando los números cuadrados se observa por ejemplo que

$$1+3+5+ \dots +(2n+1)=(n+1)^2$$

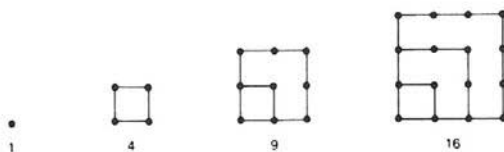


Figura 1

Su escuela descubrió también la existencia de los números irracionales, provocando con ello una de las más importantes crisis que ha tenido la Matemática.

En el tema que aquí nos interesa Pitágoras fue el primero en descubrir que la Tierra era en realidad redonda y no plana. De como dedujo este hecho es desconocido, aunque probablemente observaría que la Tierra deja una sombra redonda en los eclipses de la Luna y que los barcos se iban hundiendo en el las aguas del Mediterráneo a medida que se iban alejando de la costa. Quizás también porque la esfera es la más bonita de las figuras geométricas, y por ello la Tierra, el sol, la luna y los otros cuerpos celestes deben de tener esta forma esférica. Argumentos de este tipo nos han llegado a través de Aristóteles en su libro *De coelo*.

Una vez aceptado que la Tierra tiene forma esférica es natural preguntarse acerca de su tamaño. Eratóstenes (276-194 a.C.), sabio y bibliotecario de la biblioteca de Alejandría, que es también conocido por la criba para hallar números primos y autor de unos de los mejores mapas del mundo conocido de la época, calculó la longitud de la circunferencia terrestre. Su argumento es de una sencillez extraordinaria. Observó que en Siena, al mediodía del solsticio de verano, los rayos del sol entraban verticalmente hasta el fondo de un pozo, mientras que en la ciudad de Alejandría el sol producía una sombra en un palo clavado verticalmente en el suelo. Eratóstenes observó que la inclinación de la sombra era de $1/50$ de arco de circunferencia. Como Siena y Alejandría estaban sobre el mismo meridiano y la distancia entre ellas era de unos 5.000 estadios, la Tierra tendría por tanto una circunferencia de unos

$$50 \times 5.000 = 250.000 \text{ estadios.}$$

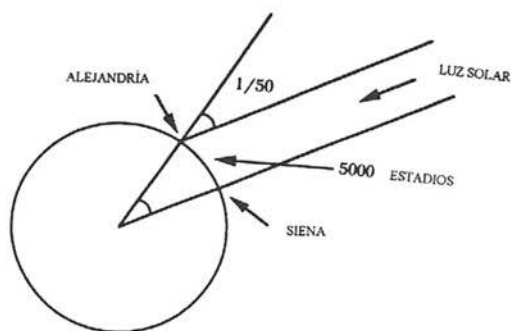


Figura 2

Aunque ahora no se sabe con certeza, parece ser que la medida de un estadio corresponde con nuestra medida actual de 167.7 metros. Luego el cálculo de Eratóstenes da $250.000 \times 167.7 = 41.925.000$ metros. Como se ve, no muy lejos de la realidad. Es realmente un toque de genialidad que a

una persona se le ocurra determinar el tamaño de la Tierra con solo la sombra de un palito.

La siguiente medida conocida de la Tierra fue debida al geógrafo, astrónomo y maestro de Cicerón Posidonius (135-51 a.C.). Posidonius observó que cuando la estrella Canopus se veía justo sobre el horizonte en la ciudad de Rodas, ésta aparecía en lo alto en Alejandría con una inclinación de un ángulo de $1/48$ de circunferencia. Como a su vez la distancia entre Rodas y Alejandría era de 5.000 estadios, el cálculo de Posidonius para la circunferencia terrestre es de $5.000 \times 48 = 240.000$ estadios. Algo menos que la estimación de Eratóstenes y más errónea. Aunque la idea de Posidonius era correcta, no tuvo en cuenta que cuando la estrella Canopus se ve justo en el horizonte, está en realidad más abajo debido a la difracción que sufren los rayos de luz al atravesar la atmósfera.

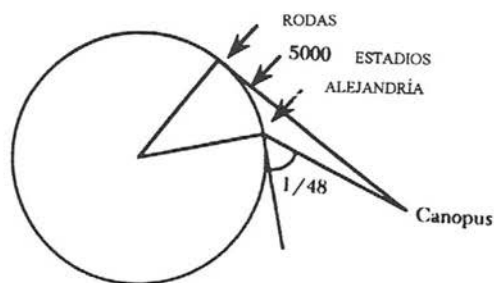


Figura 3

Estas medidas de la Tierra fueron comentadas por el geógrafo griego Estrabón (64 a.C.-25 d.C.) en su obra *Geographiae*. Estrabón criticó el método de Eratóstenes, y no sólo tomó como más adecuada la estimación de Posidonius, sino que al transcribirla se equivocó y escribió que esta era de 180.000 !! estadios.

El error ha tenido su trascendencia ya que fue aceptado posteriormente por Claudio Ptolomeo

(100-178) en su obra *Geographiae* y usado por Cristóbal Colón (1451-1506) en sus cálculos de la distancia que habría que navegar hacia el oeste para encontrarse con las Indias. Colón, además de dar una prueba definitiva de que la Tierra no era plana, hallaría con su viaje una nueva ruta, esta vez por mar, para enlazar Europa con el rico comercio de telas y especias de Oriente. Para estimar la distancia usó la medida de la circunferencia de la Tierra junto con el tamaño del continente asiático y de la distancia entre éste y Japón que Marco Polo había dado. De este modo calculó que el proyectado viaje sería de unas 3.000 millas mientras que la distancia correcta es de unas 11.000. En el año 1484 presentó su proyecto al rey Juan II de Portugal quien tenía un consejo científico asesor en materias de navegación, la *Junta dos Matemáticos*. Portugal llevaba entonces la cabecera mundial en materia de exploraciones náuticas, principalmente en las costas africanas del Atlántico. Los expertos de la Junta, conocedores de que los cálculos de Colón eran demasiado optimistas, desaconsejaron entonces la empresa. Como es sabido, Colón se dirigió entonces a la corte española de Isabel y Fernando en busca de financiación para su viaje. En España, donde quizás debido al fuerte influjo de la Iglesia y de la Inquisición los científicos no estaban muy bien considerados, aceptaron los argumentos de Colón y aprobaron su viaje. Aunque sea materia de especulación, Colón sabía probablemente que sus cálculos no eran correctos, pero quería hacer a toda costa el viaje de exploración. Lo curioso del caso es que se encontró con América justo donde tenía previsto encontrar las Indias, a unas 3.000 millas de la costa y cuando estaba ya a punto de dar la vuelta de regreso. La paradoja de todo este asunto es que ahora se hable español y no portugués en prácticamente toda Sudamérica, a excepción de Brasil.

El interés por la cartografía y la navegación creció espectacularmente en el siglo XVI a consecuencia de los descubrimientos. Para determinar la posición de un punto sobre la esfera terrestre podemos usar las coordenadas terrestres (φ, θ) φ es lo que se llama *latitud* y θ se denomina *longitud*. Para establecer un punto de partida, suele tomarse como $\theta = 0$ el meridiano de Greenwich. La relación entre estas coordenadas y las usuales coordenadas cartesianas del espacio está dada por

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \cos \theta \\ y = a \cos \varphi \sin \theta \\ z = a \sin \varphi \end{cases}$$

donde a es el radio de la Tierra. La latitud se determinaba por la inclinación o posición de las estrellas, principalmente con respecto a la estrella polar. Uno de los mejores instrumentos para determinar la latitud fue el sextante, inventado por Newton en el año 1700. La longitud fue sin embargo mucho más difícil de determinar, ya que la posición de longitud depende del huso horario donde se esté situado sobre la Tierra y para ello se necesita el reloj. El problema de la longitud fue objeto de numerosos premios y recompensas por parte de los gobiernos europeos, sin embargo debido a las dificultades para la construcción eficiente de relojes no se tuvo una buena determinación de la longitud hasta el s. XVIII.

Un tema interesante de las Matemáticas relacionado con este hecho es el estudio de C. Huygens (1629-1695) sobre los péndulos cicloidales y donde introdujo los conceptos de involuta y evoluta. En un péndulo cicloidal, el período de oscilación es independiente de la amplitud, debido a que la involuta de una cicloide resulta ser otra cicloide. Huygens usó admirablemente la ya por entonces

controvertida cicloide, que se ha conocido luego como la *Helena de la Geometría* o también como la *Manzana de la discordia* por las numerosas peleas que ha originado.

Ya desde el s. XIII se utilizaba la brújula como instrumento de navegación. Se pensaba que para ir desde un punto a otro de la superficie terrestre por la línea más corta posible se podía hacer manteniendo la proa del barco con un rumbo constante con respecto a la dirección que marca la brújula. El portugués Pedro Núñez (1502-1578) fue el primero en demostrar que esto era falso en su *Tratado da sphaera* de 1537. Observó que la luego llamada navegación loxodrómica, esto es navegar siguiendo la trayectoria de una línea de rumbo constante, o dicho de otra manera que corta los meridianos por un ángulo constante, no era lo mismo que la navegación ortodrómica, que es la que une dos puntos por el camino más corto posible. De hecho la línea más corta entre dos puntos sobre la superficie terrestre es lo que se llama geodésica y es el círculo máximo que pasa por los dos puntos, círculo obtenido como la intersección de la esfera terrestre con un plano que pase por los citados dos puntos y el centro de la esfera. En cambio la loxodroma, esto es, la curva que corta con un mismo ángulo constante a todos los meridianos, es en realidad una espiral que se va enrollando indefinidamente hacia los polos.

Pedro Núñez estudió en la Universidad de Salamanca donde se casó en 1523 con Giomar de Arias, la hija de Pedro Fernández de Arias. Hizo notables contribuciones a la ciencia y a la navegación y trabajó como cosmógrafo para el rey de Portugal y como profesor de Matemáticas en la Universidad de Coimbra. Uno de sus más famosos textos es el *Libro de Álgebra* que publicó en español y fue por mucho tiempo uno de los mejores tratados de

álgebra de la época. Escribió algunos trabajos de astronomía en latín y fue conocido también como poeta.

El problema principal de la cartografía es representar un pedazo de superficie de la esfera terrestre en un mapa plano. Es un hecho matemático que no se puede representar fielmente una parte esférica en un plano de tal manera que se preserven todas sus propiedades geométricas. Más precisamente es un Teorema lo siguiente: No puede haber una correspondencia uno-uno entre una porción de esfera y una porción de plano que conserve a la vez ángulos, áreas y distancias.

Para entender como se puede construir un mapa imaginemos la superficie del globo terrestre como una esfera a la que enrollamos un pedazo de papel plano de tal manera que quede un cilindro tangente a la esfera a lo largo del ecuador. El eje del cilindro cortará la esfera en dos puntos, los polos Norte y Sur respectivamente. Si O es el centro de la esfera y P un punto arbitrario sobre ella, el trozo de recta que empieza por O y pasa por P cortará al cilindro en un sólo punto P' que será la imagen de P . De esta manera a cada punto de la esfera, excepto los polos Norte y Sur, les corresponde un solo punto P' sobre el cilindro. Y recíprocamente, dado cualquier punto P' sobre el cilindro le corresponde un único punto P sobre la esfera que se proyecta en él. Esto establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de la esfera, excepto los polos, y los puntos del cilindro. La imagen así obtenida es como la sombra que se proyectaría sobre el cilindro por los rayos de luz si colocáramos una bombilla en O .

Si cortamos ahora el cilindro por una línea paralela a su eje obtendremos un mapa de la superficie terrestre. El ecuador aparece como una línea recta y meridianos igualmente espaciados aparecen como un

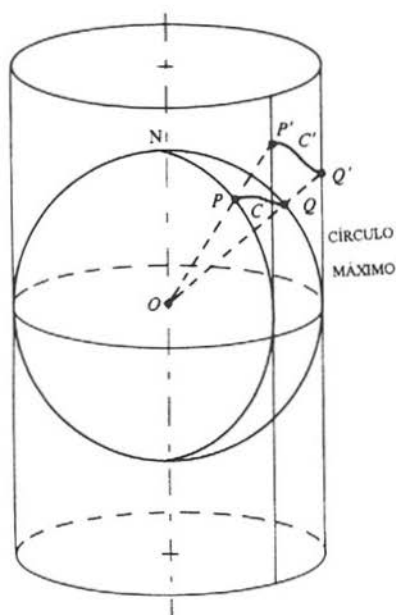


Figura 4

sistema de líneas rectas igualmente espaciadas y perpendiculares al ecuador.

Otra proyección cilíndrica distinta se obtendría por ejemplo si P' se obtuviera de P de tal manera que la recta que une P con P' fuera perpendicular al eje de la esfera que une los polos Norte y Sur. En estas proyecciones cilíndricas las regiones cercanas al ecuador se representan con bastante exactitud, pero las regiones más cercanas al polo aparecen más deformadas y más grandes sobre el plano.

Uno de los personajes más importantes y que tuvo gran influencia para la posteridad fue Claudio Ptolomeo de Alejandría. Ptolomeo es conocido por su *Colección Matemática*, un tratado de trece libros que es como la culminación de todos los conocimientos de la astronomía griega. Contiene una descripción detallada del modelo griego de epiciclos del universo, con parámetros de los movimientos del sol, la luna y las estrellas. Los árabes lo llamaron

Al-magisti, el más grande, y desde entonces se le conoce como el *Almagesto*.

Referente a lo que aquí nos interesa, Ptolomeo fue el autor del tratado *Geographiae*, una compilación de lugares del mundo conocido junto con sus latitudes y longitudes. Dibujaba los mapas en una red rectangular donde cada grado de latitud tiene la misma distancia que un grado de longitud. Introdujo también la llamada *proyección estereográfica*, que conserva los ángulos y por tanto la forma de las regiones y de las costas. La proyección estereográfica considerada por Ptolomeo se construye del siguiente modo: Dado un punto P sobre la esfera terrestre tracemos el segmento de línea recta que une P con el polo Sur S . Este segmento, corta al plano que pasa por el centro de la esfera y por el ecuador en un único punto P' , que es por definición la imagen de P por la proyección estereográfica.

Una proyección que conserve ángulos se llama *conforme* y la proyección estereográfica es como el prototipo de aplicación conforme en variable compleja, ya que obtiene el plano complejo como representación conforme de la llamada esfera de Riemann.

Es de destacar que posteriormente durante el s. XIV, fue famosa la escuela de cartografía mallorquina, en especial los judíos Abraham y su hijo Jafuda Cresques, por sus excelentes mapas *portolanos*, donde los distintos puertos están conectados por líneas rectas, líneas que son el rumbo que marca la brújula.

En un área relativamente pequeña del globo terrestre como pueda ser el mar Mediterráneo, estos mapas son más o menos correctos para la navegación. Sin embargo en la época de las grandes exploraciones los errores de navegación debido a la inexactitud a grandes latitudes eran manifiestos. Hacía falta un mapa que fuera fácil de manejar por los navegantes. Esto principalmente significa que las

rutas tomadas con una inclinación constante con respecto de la dirección que marca la brújula, esto es las líneas de rumbo o loxodromas, se representen como líneas rectas en el mapa que conecten los puntos de partida y de llegada. La historia de la construcción de este mapa es interesante y fue el origen del descubrimiento de la fórmula de la integral de la secante

$$\int \sec \theta \, d\theta = \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$$

Comprobar esta fórmula es ahora fácil, basta por ejemplo con derivar la parte de la derecha para, después quizás de una sencilla manipulación trigonométrica, comprobar que se obtiene $\sec \theta$. El interés de esta historia, tal como describiremos a continuación, radica en que ésta fue descubierta experimentalmente mucho antes del descubrimiento del cálculo diferencial e integral por Newton y Leibniz en la segunda parte del siglo XVII.

El primero que construyó un mapa donde las líneas de rumbo aparecían como rectas fue el cartógrafo holandés Gerardus Mercator (1512-1594), de nombre latino Gerad Kremer, que publicó el famoso y para nosotros ahora familiar mapa mundi en 1569 *Nova et aucta orbis terrae descriptio*.

En el caso de la proyección de Mercator, se requiere que las líneas que forman ángulo constante con los meridianos aparezcan como rectas en el mapa. Por lo tanto las imágenes de tales meridianos tienen que ser rectas paralelas en el plano y si queremos que el mapa conserve ángulos, las imágenes de los paralelos sobre la esfera tendrán que ser rectas paralelas y perpendiculares a las anteriores.

En la figura siguiente, que representa un pedazo de la esfera, AB es el ecuador, C es el centro de la Tierra y T el polo Norte. El paralelo de latitud θ es

una circunferencia con centro en P que incluye el arco MN entre los meridianos AT y BT . Entonces BC y NP son paralelos y los «triángulos» ABC y MNP son semejantes, por tanto

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{NC}{NP} = \sec \theta$$

De donde

$$AB = MN \sec \theta$$

Si ponemos AB sobre el mapa y queremos que la imagen de MN tenga la misma longitud, entonces debemos estirar MN por el factor $\sec \theta$. Para que el mapa conserve ángulos debemos estirar por igual no sólo horizontalmente sino también verticalmente por $\sec \theta$. Sin embargo la corrección es distinta para cada latitud θ y por tanto si $D(\theta)$ es la distancia al ecuador de un punto sobre el paralelo de longitud θ , el pequeño incremento vertical infinitesimal dD con que debemos aumentar el correspondiente incremento $d\theta$ de θ es

$$dD = \sec \theta \, d\theta$$

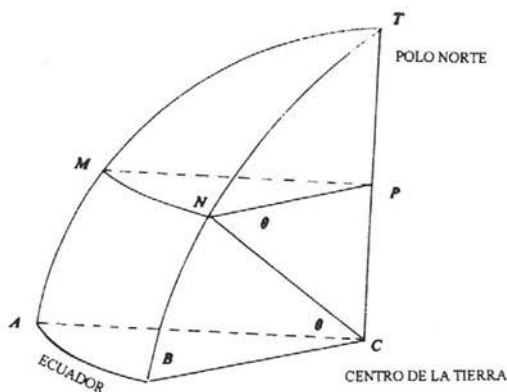


Figura 5

Por tanto la distancia sobre el mapa desde el ecuador al paralelo de latitud θ debe ser

$$D(\theta) \int_0^\theta \sec \theta \, d\theta$$

Más o menos siguiendo estas ideas, pero sin la precisión matemática y tanteando empíricamente, Mercator construyó el mapa que ahora lleva su nombre.

Posteriormente en 1599 el inglés Edward Wright (1561-1615) publica *Certaine Errors in Navigation ... Detected and Corrected*, donde da la descripción matemática que hemos expuesto anteriormente, aunque con un lenguaje distinto ya que todavía no se había descubierto el cálculo integral. Wright describe como calcular $D(\theta)$ como una *perpetua adición de secantes*:

the parts of the meridian at euerie poynt of latitude must needs increase with the same proportion wherewith the Secantes or hypotenusae of the arke, intercepted betweene those pointes of latitude and the aequinotiall [equator] do increase. ... For ... by perpetuall addition of the Secantes answerable to the latitudes of each point or parallel vnto the summe compounded of all former secantes, ... we may take a table which shall shew the sections and points of latitude in the meridians of the nautical planisphaere: by which sections, the parallels are to be drawne.

Como se ve Wright da un método para calcular la integral de la secante $D(\theta)$ como una especie de suma de Riemann y publicó una tabla para latitudes por debajo de 75° . Wright no sólo dio este método para construir e interpretar con precisión el mapa de

Mercator sino que encontró un sencillo modelo físico. Consideremos el cilindro tangente a la esfera terrestre por el ecuador e imaginemos la esfera como si fuera un globo inflable. Al ir llenando el globo de aire, identifiquemos los puntos sobre la Tierra con los puntos sobre el cilindro que entran en contacto. De esta forma se va estirando de la misma forma tanto en horizontal como en vertical. Si finalmente desenrollamos el cilindro, nos encontramos con el mapa de Mercator.

Los logaritmos fueron inventados por John Napier (1550-1617) en 1614. En su primera aparición fueron unas tablas por medio de las cuales se podían sustituir multiplicaciones por sumas, utilizando el hecho de que el logaritmo de un producto es la suma de logaritmos. Esto simplificaba enormemente y reducía el error de los largos cálculos trigonométricos entonces usados en astronomía. A partir de entonces fueron apareciendo numerosas tablas de logaritmos de funciones trigonométricas. En 1640, Henry Bond (1600-1678), un profesor de Matemáticas y navegación, observó accidentalmente la extraordinaria analogía entre los valores de las tablas de la integral de la secante $D(\theta)$ con los valores de los logaritmos neperianos de tangentes y conjeturó en 1645 que

$$D(\theta) = \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

La conjetura fue ampliamente conocida y su demostración constituyó uno de los más importantes retos al mundo matemático de mitad del siglo diecisiete. La relación fue finalmente probada por James Gregory (1638-1675) en 1668. Otras pruebas posteriores fueron debidas a Isaac Barrow (1630-1677) en 1670, John Wallis (1616-1703) dio una solución usando series en 1685 y Edmond Halley (1656-1742) simplificó el problema en 1695, demostrando pri-

mero que la imagen de una loxodroma por la proyección estereográfica es una espiral logarítmica y usando luego un argumento de series. Halley es conocido por el famoso cometa que lleva su nombre. Habiendo éste aparecido en 1531, 1607 y 1682, Halley predijo correctamente que volvería a aparecer en 1758. Es conocido también por haber publicado los *Principia* de Newton, donde entre otras cosas se dio a conocer la ley de la gravitación universal.

Es también interesante observar que Thomas Harriot (1560-1621) dio con la solución del problema matemático de Mercator mucho antes entre 1580 y 1590. Sin embargo sus trabajos referentes a este tema no fueron publicados y se han hallado en el año 1953 entre sus papeles manuscritos, que forman unos ocho volúmenes y se encuentran depositados en el Museo Británico. En sus argumentos prueba también que la imagen de la loxodroma por la proyección estereográfica es una espiral logarítmica y luego con un argumento geométrico muy original halló su longitud, siendo esta la primera vez en la historia que se halla la longitud de una curva.

Harriot trabajaba como asesor científico y naval y se le considera como el fundador de la escuela inglesa de algebristas. Su trabajo más conocido es *Artis analyticae praxis*, donde trata de las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, relaciones entre coeficientes y raíces, etc. Fue publicado unos diez años después de su muerte. Harriot formó parte en 1585 de una expedición para explorar y hacer mapas del Nuevo Mundo en la entonces llamada Virginia, ahora North Carolina, en los Estados Unidos. Su muerte fue debida a una úlcera cancerosa en su tabique nasal izquierdo, provocada por la inhalación de tabaco, hábito que aprendió de los Indios en su viaje. Es por ello quizás también la primera muerte que

se ha registrado en la historia por el hecho de fumar.

Como todavía no se conocían los logaritmos, la espiral logarítmica se llamaba entonces la espiral equiangular, ya que estaba caracterizada por la propiedad de que los radios vectores ρ cortan la curva por un ángulo constante ϕ . Aparece por primera vez en una carta de Descartes a Mersenne en 1638. Fue ampliamente estudiada por Jakob Bernoulli (1654-1705), quién escribió su ecuación en coordenadas polares (r, θ) como

$$\ln r = a \theta$$

de donde el nombre de la curva. Actualmente se suele escribir en su forma equivalente $r = e^{a\theta}$. La espiral tiene numerosas propiedades interesantes, y es invariante bajo un gran variedad de transformaciones. Jakob Bernoulli estaba tan entusiasmado con la curva que la mandó inscribir en su tumba junto con la inscripción *Eadem mutata resurgo* («Aunque cambiada, siempre resurgiré la misma»).

Para terminar este artículo vamos a exponer el argumento de Harriot para calcular la longitud y el área de la espiral logarítmica. No teniendo los recursos del cálculo Harriot utilizó una ingeniosa idea geométrica junto con un argumento de paso al límite.

Su construcción está ilustrada en la figura. Consideremos por ejemplo la espiral de ángulo $\phi = 55^\circ$ que esté aproximada por una poligonal $s_1, s_2, s_3, \dots$ adaptada a la espiral. Al conectar los vértices de esta poligonal con el origen P obtenemos una sucesión de triángulos $T_1, T_2, T_3, \dots$ que pueden reagruparse hasta formar el triángulo isósceles de base a y ángulos base de 55° , ABT , cuya área es por tanto igual al área encerrada por la espiral. Además

$$BT + AT = s_1 + s_2 + s_3 + \dots$$

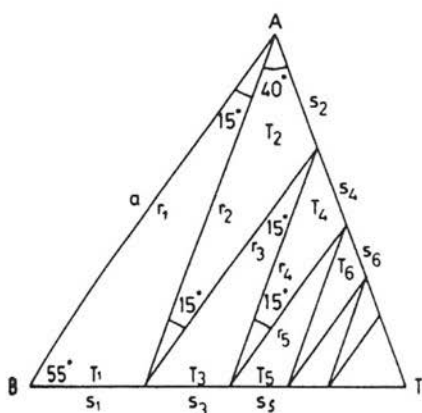
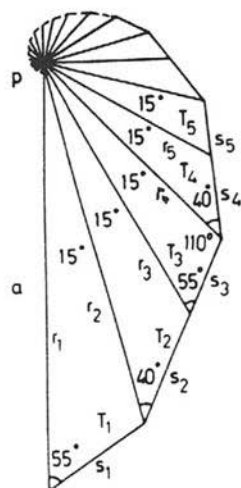


Figura 7



es igual a la longitud de la espiral. Lo curioso es que si hacemos aproximación a la espiral por una poligonal de segmentos más cortos $s'_1, s'_2, s'_3, \dots$ y repetimos el proceso entonces obtenemos el mismo triángulo ABT . Luego la longitud y el área encerradas por la nueva poligonal sigue siendo la

misma. Como la poligonal tiende hacia la espiral logarítmica al hacer los segmentos cada vez más pequeños resulta por tanto que la longitud de esta espiral es $BT+AT$ y que el área que encierra es la del triángulo ABT .

REFERENCIAS

- BOYER, Carl (1968). *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons (hay una traducción en Alianza Universidad).
- CAJORI, Florian (1915). On an integration antedating the integral calculus. *Bibliotheca Mathematica*, 3rd series, 14, 312-319.
- CALINGER, Ronald (1996). *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*. The Mathematical Association of America, MAA Notes n° 40.
- CARSLAW, H.S. (1924). The story of Mercator's map. *The Mathematical Gazette*, Vol. XII, 168, 1-7.
- CRONE, G.R. (1978). *Maps and Their Makers*, 5th edition. Folkestone, Kent, England: Wm. Dawson and Sons, Ltd.
- FISHER, I. (1965). How far is from here to there? *The Mathematics Teacher*, 123-130.
- GILLISPIE, C.C. ed. (1970-1980). *The Dictionary of Scientific Biography*. New York: Charles Scribner's Sons.
- KATZ, Victor J. (1993). *A History of Mathematics: an Introduction*. Harper and Collins College Publishers.
- KLINE, Morris (1973). *El fracaso de la Matemática Moderna*. Madrid: Siglo XXI de Editores S.A.
- LARSEN, H.D. (1952). Club Topics. *American Mathematical Monthly*, 59, 475-478.
- NIEVERGELT, Y. (1996). Differentials and geographical maps in multivariable calculus and complex analysis. *UMAP Modules in Undergraduate Mathematics and Its Applications*, 17, 1, 25-70.
- NORD, John (1996). Mercator's Rhumb Lines: A Multivariable Application of Arc Length. *Mathematics Magazine*, 27, 5, 384-387.
- PEPPER, J.V. (1967). Harriot's calculation of the meridional parts as logarithmic tangents. *Archive for History of Exact Science*, 4, 359-413.
- RESNIKOFF, H.L.; WELLS, R.O. (1984). *Mathematics in Civilization*. New York: Dover Publications Inc.
- RICKEY, V.F. (1992). How Columbus Encountered America. *Mathematics Magazine*, 65, 4, 219-225.
- RICKEY, V.F.; TUCHINSKY, P. (1980). An Application of Geography to Mathematics: History of the Integral of the Secant. *Mathematics Magazine*, 53, 3, 162-166.
- SACHS, J.M. (1987). A Curious Mixture of Maps, Dates, and Names. *Mathematics Magazine*, 60, 3, 151-158.
- STILLWELL, John (1989). *Mathematics and Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag.
- WRIGHT, Edward (1599). *Certain Errors in Navigation, Arising either of the ordinaire erroneous making or using of the sea Chart, Compasse, Crosse staffe, and Tables of declination of the Sunne, and fixed Starres detected and corrected*. London: Valentine Sims.

Resumen

Las matemáticas ocupan un lugar principal en la escuela. Las matemáticas tienen esta importancia por formar una parte de nuestra cultura y por ser además una de las pocas asignaturas que hacen pensar al estudiante. Siguiendo este objetivo y para hacer nuestras clases más amenas e interesantes proponemos usar temas e ideas provenientes de la Historia de las Matemáticas. Se expone como ejemplo el desarrollo histórico de la cartografía y de la navegación.

Palabras clave: planes de estudio, problemas clásicos, medida de la Tierra, mapas, proyección de Mercator, espiral logarítmica.

Abstract

Mathematics play an important role at school. Mathematics have this relevance because they are part of our culture and also because they are one of the few subjects that force our students to think. According to this objective and in order to make our classes more enjoyable and interesting we propose to use themes and ideas coming from the History of Mathematics. As an example we expose the historical development of cartography and navigation.

Key words: course programs, classical problems, measurement of the Earth, maps, Mercator's projection, logarithmic spiral.

Bartolomé Barceló

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de Madrid

28049 MADRID