tarbiya

número 15 • Enero-Abril 1997

Revista de investigación e innovación educativa

Universidad Autónoma de Madrid
Instituto de Ciencias de la Educación

tarbiya

Revista de investigación e innovación educativa

número **15** • **Enero-Abril** 1997

MONOGRÁFICO

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

COMPILACIÓN:

CÉSAR SÁENZ CASTRO

UAM
UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE MADRID

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

índice

Introducción

EN este monográfico de TARBIYA vamos a hablar de educación matemática y aspectos relacionados. Y cuando reflexionamos sobre este tema tenemos que tener clara la pregunta de partida: ¿Qué sentido tiene la matemática para nuestros alumnos? ¿Por qué deben aprender matemáticas nuestros estudiantes?

Si la pregunta nos parece sensata y clara, abordemos la respuesta. Parece que ésta ya no es evidente porque se establece una paradoja inicial, donde preguntas y respuestas explícitas se entrecruzan con preguntas o respuestas implícitas u ocultas. Nos explicamos:

PARADOJA INICIAL

PREGUNTA DEL ALUMNO *(DE LA SOCIEDAD)* ¿ PARA QUE SIRVE LA MATEMÁTICA ?	RESPUESTA DE LOS PROFESORES *(DE LA INSTITUCIÓN)* * PARA APRENDER A PENSAR * PARA PROPORCIONAR TÉCNICAS Y MODELOS A OTRAS CIENCIAS * PARA RESPONDER A MUCHAS NECESIDADES DE LA VIDA COTIDIANA *PARA DISFRUTAR
RESPUESTAS OCULTAS *(DEL ALUMNO)* * PARA HACERME SUFRIR * PARA TENERME PRE-OCUPADO	PREGUNTAS OCULTAS *(DEL PROFESOR)* * ¿DE VERDAD SIRVE PARA TODO ESO? * ¿ SON COMPATIBLES LOS 4 OBJETIVOS ENTRE SÍ, EN LA PRÁCTICA EDUCATIVA?

Podemos decir que los distintos artículos que componen este número tienen como marco de referencia esta paradoja inicial. Los hemos agrupado en dos apartados:

a) Reflexiones teóricas sobre la matemática y su enseñanza.

b) Apuntes de historia de la matemática con posible interés para la práctica educativa.

Los tres trabajos que constituyen el primer apartado son muy distintos entre sí pero pensamos que complementarios. El profesor García Suárez propone un objetivo original y sugerente: la matemática como saber integrador de las disciplinas de ciencias y de letras, que en la educación tradicional aparecen como dominios disjuntos. Las profesoras Papini, Otero y Elichiribehety, desvelan con lucidez algunos supuestos implícitos y no muy claros de la metodología constructivista que se nos presenta, hoy día, como la panacea universal en la enseñanza de las matemáticas. El profesor Peralta también aborda el análisis crítico de ésta misma metodología tal como se concreta en el currículo de matemáticas de la enseñanza secundaria española, y hace unas reflexiones didácticas muy oportunas.

El segundo apartado tiene un enfoque práctico en cuanto nos centramos en la historia de las matemáticas como instrumento adecuado de educación matemática. Podiamos haber diversificado el arsenal instrumental que hoy se ofrece al profesor como recurso didáctico: los estudios sobre ideas previas y errores sistemáticos que cometen los estudiantes al abordar tareas matemáticas, los estudios sobre la incidéncia didáctica de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática, etc. Hemos preferido, sin embargo, limitarnos a presentar trabajos de tipo histórico que pueden dar elementos de juicio para responder a una pregunta que puede ser clave en el proceso de enseñanza-aprendizaje: ¿Nuestros alumnos, en su adquisición personal del conocimiento matemático, siguen el mismo proceso y tienen las mismas dificultades que la sociedad (matemática) en la génesis histórica de ese conocimiento?

Los trabajos de este apartado también son de factura muy distinta pero complementaria: el profesor Moreno se mueve en el campo de la geometría al presentarnos su interesante investigación sobre las contribuciones de matemáticos españoles al teorema de Ptolomeo. La profesora Romo se mueve en el dominio aritmético, al presentarnos algunos antiguos problemas árabes; no podía faltar en una revista que se llama TARBIYA («Educación» en árabe) una referencia a la floreciente matemática árabe medieval. El profesor Barceló aborda la historia de la matemática de la navegación y cartografía que proporciona interesantes sugerencias didácticas para trabajar con los alumnos de hoy. El profesor Cachafeiro nos presenta un trabajo que linda por un lado con la inteligencia artificial y por otro con un apunte histórico sobre resolución de ecuaciones, en un híbrido que consideramos muy original. Yo mismo he tratado de completar el florido árbol matemático presentando una reflexión histórico-epistemológica sobre la génesis de la matemática del azar.

Aviso a navegantes: el lector no se va a encontrar en lo que sigue recetas, más o menos mágicas, sobre la metodología didáctica a seguir. Sólo caminos bastante borrosos que se pueden emprender. ¿No habíamos quedado que «no hay camino real a la geometría»?

César Sáenz Castro
Instituto Ciencias de la Educación
Universidad Autónoma de Madrid
e-mail: cesar.saenz@uam.es

Reflexiones teóricas sobre la matemática y su enseñanza

La confrontación Ciencias-Letras: La matemática como saber reintegrador

Xenaro García Suárez

1. Introducción

SEGÚN Marx las condiciones materiales y las relaciones de producción tienen un poder determinístico fundamental respecto a la estructura y a las interrelaciones sociales. La sociedad tiene una infraestructura o base económica que determina en última instancia los dos niveles de superestructura: la ley, el estado y las ideologías asociadas; siendo el estado quien mantiene a través del aparato represivo la producción y crea las condiciones de reproducción de la fuerza de trabajo en favor del capital y de la clase dominante.

Althusser mantiene que además de depender del aparato represivo del estado, la reproducción, también depende del aparato ideológico, que incluye a la educación, la ley, la política y la cultura, siendo para él la educación el medio más potente del estado para tratar de instalar al individuo en las condiciones de vida de las masas.

Aceptado el análisis marxista, el conocimiento matemático aparecerá intrínsecamente ligado a otros saberes, cuestión que debe ser tomada en consideración para desmarcarse de ciertas corrientes epistemológicas que presuponen bases justificativas completamente distintas para cada rama del saber, ignorando sociedad e historia.

No creemos que la anterior tesis quede descalificada por el punto de vista postestructuralista, según el cual la cultura no sería más que un constructo moderno que vendría dado por el discurso mercantil dominante. En definitiva, todo conocimiento humano estará interconectado mediante un substrato cultural compartido, y de esta manera el conocimiento inducido, como herramienta esencial, posibilitará un camino en la perspectiva de la consecución de un sujeto autodeterminado que sea capaz de protagonizar un cambio social.

2. El engastamiento cultural de la matemática

Como parte sustancial de la cultura de esta sociedad, la matemática, tendrá que contribuir a la consecución de fines globales —no sólo instrumentales—, ayudando al ciudadano a tener sentido de la vida y del mundo y dotándolo de medios que le proporcionen una mejor comprensión de la experiencia humana.

El punto de partida de la construcción matemática habría que ubicarlo en los sistemas de valores de cada cultura, que se presuponen en principio igualmente válidos. No hay valores superiores a otros. Pero habría que ser verdaderamente iluso para creer que puedan existir en alguna sociedad sistemas de valores que no tengan la impronta del omnipresente mercado mundial (quizás a estas alturas ni se puedan excluir los papuas de Nueva Guinea). Y aunque no postulemos que la geometría riemanniana tenga más potencia que el sistema de numeración de los papuas, hay que reconocer que la matemática como tradición, además de la componente estética que la enmaraña en la trama cultural, tiene una potencia singular en lo que se refiere a la interpretación y transformación de la naturaleza.

Conviene también recordar que ciertas creaciones que configuran la actual matemática académica fueron fruto de determinadas tendencias políticas y sociales, dándose el caso de que muchas corrientes y teorías matemáticas hoy completamente legitimadas fueron producto de intereses ideológicos o de clase y no de una pretendida objetividad racional.

Así las cosas, historia y sociedad no se deben contraponer, ni siquiera al hablar de matemática, y una primera conclusión a sacar, si nos aproximamos a la historia social de las matemáticas, podría ser que no hay por que desechar el juego de la contextualización, e incluso de la legitimación, de ciertos aspectos matemáticos domésticos y populares (considerados en principio no académicos) como vehículo de reconstrucción y re-contextualización. Pero también es cierto que, si tratamos de respetar un contexto socio-cultural, no se deben olvidar las otras manifestaciones culturales, en un sentido más estricto del término, como por ejemplo el arte y la literatura, que pueden ser una referencia fundamental al tratar de reintegrar las matemáticas en la esfera del saber liberador y crítico.

Entender las matemáticas como una realización cultural en la super-estructura, nos lleva a reconocer en primer lugar que estamos ante una disciplina difícil tanto de enseñar como de aprender. Una disciplina que se presenta jerarquizada en su componente fundamental (académica), de la que la habilidad para abordar nuevos conocimientos depende en gran medida de un amplio entendimiento de conocimientos dados anteriormente, tanto en lo referido al tiempo histórico como al adiestramiento de cada uno. Bourbaki presupuso la existencia de una estructura informal comprensible de las matemáticas, ofreciendo un sistema lo suficientemente estructurado que diera como resultado la presentación de todo el conocimiento matemático. Para ello el sistema formal emanaba de la asunción de la teoría de conjuntos como fundamento. Ahora bien, en este intento el grupo Bourbaki no hacía otra cosa que impregnarse de una corriente de pensamiento (en principio extra-matemática; el estructuralismo) dominante, en Francia, a mediados de siglo con raíces en la antropología y en la lingüística. Al asumir el corte histórico, la propuesta bourbaquiana nace culturalmente limitada, y en cierta medida muerta por darse en un tiempo en que ya la meta-matemática (Gödel) estableciera que ese acopio de saber que pretendían normalizar no tenía cabida dentro de un sistema axiomático finito.

Las matemáticas se desarrollaron a través del tiempo, en los mismos tiempos y espacios que las otras artes y ciencias, y lo mismo que ellas, como resultado de grandes esfuerzos personales y marcadas por condicionamientos sociales. Impregnarse de este punto de vista consideramos que es una cuestión crucial.

3. Las dos culturas

Es ya tópico en nuestra sociedad asumir que el sistema educativo y la vida intelectual se caracterizan por una ruptura entre dos culturas; las artes y humanidades por una parte, y las ciencias por otra. Una larga controversia aun hoy vigente de la que C.P. Snow[1] trató de dar las claves en 1959. «¿Existe la esperanza de una cultura común?», «¿Hay algún rasgo característico común entre las letras y las ciencias?». Creemos que las matemáticas tienen algo que decir en esta histórica desavenencia.

La división entre las dos culturas con el tiempo se fue haciendo aun más pronunciada y alcanzar en nuestros días un dominio semejante al del hombre renacentista parece imposible. De todas formas, aunque de los cambios educativos no se espere que produzcan milagros, podemos intentar educar a nuestros jóvenes de manera que no sean unos ignorantes en las experiencias imaginativas: artísticas, científicas o matemáticas, y tengan acceso a ciertas sensaciones análogas a las que algunos seres humanos experimentaron y otros siguen experimentando en ocasiones.

La enseñanza de las matemáticas en los últimos lustros se redujo a la reproducción de ciertos resultados embebidos en un lenguaje semi-formalizado junto a una serie de automatismos digeridos por medio de actividades y ejercicios carentes de cualquier perspectiva histórica, e inclusive motivadora, dentro de las mismas matemáticas. Se hizo mayor o menor inflexión en la algoritmia o en el lenguaje según que el nivel de referencia fuese la enseñanza básica, media, o universitaria. Dentro de este enfoque es normal, por ejemplo, presentar las desigualdades señeras de la teoría de números[2] como meros teoremas a demostrar por inducción sin ninguna referencia geométrica; o el Teorema de Rolle desposeído de su origen contextual —acotación y cálculo de raíces de una ecuación algebraica— como una simple tautología que brota de los fundamentos de Weirstrass o Dedekind. Los ejemplos podrían multiplicarse *ad infinitum.*

La transmisión monótona del conocimiento matemático, fruto la mayoría de las veces de una monótona pseudo-sintaxis como saber exclusivo en la cabeza del profesor, privó al alumno de toda sensación estética y lo inhabilitó para el disfrute matemático de por vida, exceptuando a aquellos que optaron por las matemáticas como profesión y que tuvieron la suerte de salirse del corsé normativo sintáctico-estructural.

El sistema educativo, en gran parte debido a la gran auto-estima de los profesores de matemáticas —que tanto pontificaban contra físicos y químicos por el uso espúreo del cálculo, como descalificaban a los de *letras* por practicar saberes fáciles—, consiguió convertir en abismo lo que apenas era una pequeña zanja, en ocasiones superable. La constatación es que la ansiedad matemática existe, y la incomprensión global entre matemáticos y no matemáticos es el corolario de muchas acciones convergentes dirigidas, consciente o inconscientemente, a tal fin. Se obtuvo de este modo un divorcio total entre aquellos que aplican las matemáticas y aquellos otros que las disfrutan. Entre los que gozan al practicar la literatura o la música y entre a los que las matemáticas le producen una honda sensación estética.

Se presentan entonces las matemáticas como un terreno vedado tanto para el mundo del arte como también, en cierto sentido, para el de las ciencias y las técnicas. Para los científicos y técnicos, manipu-

1 C.P. Snow (1959). *The two cultures.* New York: Cambridge University Press.

2 Por ejemplo, todos los resultados que Leibniz utilizó para el cálculo integral.

ladores de algoritmos y conocedores de potentes herramientas de cálculo, su propia confianza en que son los verdaderos usuarios de la matemática —que incluso en ocasiones manejan con destreza— los incapacita para cualquier reflexión en profundidad y para alcanzar cierto goce al analizar determinado concepto crucial. La gran proximidad al edificio matemático les imposibilita la contemplación de los pisos más altos; los árboles de las aplicaciones rutinarias no le dejan ver el bosque del entretejido estético-conceptual.

A los *facedores* de arte —músicos, escritores, pintores,...—, salvo raras excepciones, el mundo de las matemáticas ya les quedó demasiado lejos desde sus años escolares, y todo su saber en este campo se limita a utilizar la «regla de tres» en su interpretación más banal, para deducir bien el IVA, controlar los derechos de autor o saber a cuanto asciende el corretaje del galerista.

Este desencuentro es un fiel reflejo de la división del trabajo en nuestra sociedad, en la que se llega a asumir que desarrollo científico-técnico tiene que llevar parejo deshumanización y aculturación. Para saber un poco de algo hay que renunciar a casi todo —no sólo al saber, sino al hacer—; los expertos en arte sabrán de arte —mejor de la sub-arte correspondiente—, y los expertos en supercuerdas sabrán de supercuerdas. Ambos podrán ignorar completamente cualquier otra rama del saber humano.

3. Matemáticas y literatura

Existen, sin embargo, ejemplos de sobra en los que tratar de fundamentar una línea de actuación que ayude a cambiar este estado de cosas. Pero a pesar de las múltiples ocasiones en que matemáticas y literatura, o matemáticos y escritores se entrelazan (e incluso teniendo múltiples testimonios de escritores para los que las aficiones matemáticas fueron algo más que vicios ocultos), rara vez se escucha hablar, a título de ejemplo, de que Dostoievski era ingeniero y novelista, de la gran formación matemática que tenían Stendhal o Valery, o de Raymond Quenneau compañero de *fazañas* «patafísicas» de Boris Vian (otro ingeniero, poeta, novelista, músico,...), que era el mismo Quenneau matemático, colaborador del grupo Bourbaki. ¿Qué decir de Sábato que iba para físico atómico y como tal ejerció unos cuántos años, del Goethe impregnado de física para parir una teoría *sui generis* de los colores, o de Rafel Dieste recreándose en el tránsito de Euclides a Lobatchevski y Riemann?

La separación sectaria y acrítica entre ciencias y letras para obtener fácilmente arbitrarios anatemas descalificadores sobre el bando contrario[3], quizás sea la razón profunda de que no se haga el suficiente hincapié en estos casos, indudablemente singulares, para establecer una cabeza de puente entre dos manifestaciones del intelecto que se suelen presentar como completamente independientes. La lista de ejemplos podríamos hacerla tan larga como quisiéramos sin más que acudir a un diccionario enciclopédico medianamente documentado.

Así las cosas, sin pretender agotar el tema, damos en lo que sigue unos elementos mínimos que consideramos iniciáticos a la hora de canalizar el estudio de las relaciones matemática-literatura, intento globalizador ambicioso en demasía, que quizás habría que mudar por: la matemática en la obra de determinado autor, tal y como se puede hablar de

3 Sería difícil decir cual de las dos sentencias , «...es que es de ciencias», «...es que es de letras», pronunciadas desde la prepotencia del *hemi-sapiente* produce una impresión más chabacana.

la filosofía en la obra de Hördelin o de la música en la de Anthony Burgess.

Paul Valéry que reverenciaba el *número*, y soñaba con algoritmos para el pensamiento, siempre se consideró uno más entre sus amigos los matemáticos. La carta que Francois Le Lionnais reproduce a modo de introducción en su recopilación *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*[4] [contestación (datada en febrero de 1932) después de ser preguntado sobre cual sería la mejor iniciación en las ciencias matemáticas] es una prueba fehaciente del dominio en profundidad que tenía de la disciplina. La transcribimos a continuación:

> *«Su carta me desconcierta, lo que no quiere decir que no me interese. Ante todo, estoy bastante asombrado de que se me tome por consejero en esa materia pues tiene usted a su alcance a matemáticos de profesión. En segundo lugar, no veo por que desea usted abordar la mecánica racional antes que otra rama de la ciencia , ya que usted no persigue más que un objetivo de disciplina y entrenamiento intelectual. Si se posee una escasa cultura matemática no se debe pensar, antes de que pase bastante tiempo, en meditar de un modo útil los trabajos de Lagrange y Hamilton. Además, no conozco ningún libro que responda completamente a lo que usted desea. Sin embargo, si le atrae el aspecto matemático del pensamiento, o más bien el aspecto filosófico de las matemáticas, lea las obras de Bertrand Russell, que son muy notables, y combine su lectura con la de los estudios críticos de H. Poincaré. Para la mecánica hallará informes preciosos sobre su génesis en de los volúmenes de Jouquet basados en textos originales, desde la antigüedad. Desgraciadamente, la guerra interrumpió la publicación de esta antología ordenada y comentada que se detiene (si mis recuerdos son exactos) antes de la introducción del principio de Mayer.*
>
> *Pero, de manera general, si usted no pretende hacer de las matemáticas su principal objeto de estudio y si no busca en ella más que el fruto típico que pueden ofrecer al espíritu, la atención y el análisis de conceptos arbitrariamente definidos, me permito darle el consejo de que retome los comienzos de esta ciencia y considere por usted mismo los problemas más elementales (en apariencia). Estas premisas, por lo demás, son una fuente perpetua de reflexión y descubrimiento para los maestros. Nada más que en la numeración encontrará usted materia para reflexionar durante largo tiempo. Piense que Leibniz no desdeñó ocuparse de ella. No menos interesante para la meditación es la notación algebraica. Toda la parte formal y simbólica que de ella se derivó poco a poco y que adquirió un desarrollo inmenso, es algo del mayor interés. Lo mismo ocurre con las definiciones y los postulados de la geometría, cuyo análisis infinitamente sutil, realizado en los tiempos modernos, permitió concebir la física como una geometría generalizada.*
>
> *Ahí están, señor, algunas sugerencias. No sé si responden a sus deseos, pero yo no soy en absoluto un especialista, sino a lo sumo un admirador y un amante desgraciado de la más bella de las ciencias.*
>
> *Reciba usted las expresiones de mi más alta consideración».*

En la carta anterior, Paul Valéry, muestra tener un conocimiento exhaustivo del saber matemático

4 Le Lionnais, F. (Ed.) (1963). *Las Grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: EUDEBA.

de la época. Valéry a pesar de sus conocimientos en física y matemáticas, de toda la simbología, estructuras subyacentes y visión cosmológica consonante con las teorías científicas del momento, que deja plasmadas en su obra, marca con claridad el abismo que separa —quizás con el tiempo cada vez menor— a las vanguardias artísticas del discurso reducido al lenguaje preciso de la matemática.

En «Los Hermanos Karamazov» que Dostoievski escribió entre 1878 y 1880, Iván le dirige a su hermano Aliosha, un poco antes de que aparezca el Gran Inquisidor, el siguiente discurso:

> *«Pero esto es lo que hay que decir: si Dios realmente existe y, realmente, creó el Mundo, entonces como todos sabemos, lo creó de acuerdo con la geometría euclidiana, y creó la mente humana capaz de concebir solo tres dimensiones del espacio. Y sin embargo, hubo y aun hay matemáticos y filósofos, algunos de ellos de extraordinario talento, que dudan si todo el Universo o, para decirlo de manera más amplia, toda existencia, fue creada solo de acuerdo con la geometría euclidana, e incluso se atreven a soñar que dos rectas paralelas que, de acuerdo con Euclides, nunca se pueden cortar en la Tierra, quizás puedan hacerlo en el infinito. Yo, querido hermano, llegué a la conclusión de que si no alcanzo a entender ni siquiera eso, como se puede esperar que entienda algo de Dios?*
>
> *Ten la bondad de entender que no es que no acepte a Dios, sino al mundo que creó. No acepto el mundo de Dios y me niego a aceptarlo. Te lo expondré de otro modo: estoy convencido como un niño de que las heridas curarán y las cicatrices desaparecerán, de que el repugnante y cómico espectáculo de las contradicciones humanas se difuminará como un lamentable espejismo, como una repugnante y odiosa invención de la débil e infinitamente insignificante mente euclidiana del hombre... Que se corten las paralelas y que yo mismo pueda verlo: lo veré y diré que se cortan, pero ni así lo aceptaré.»*

Dostoievski, por boca de Iván, tercia en la polémica suscitada con motivo del descubrimiento de las geometrías no euclidianas que hundían la visión del mundo basada en la confianza depositada hasta entonces en la física y en las matemáticas. Pese a los destellos de modernidad que se reflejan en el texto, que demuestran un conocimiento y dominio de parcelas de la matemática aun por normalizar —por decirlo de algún modo—, llama la atención la posición sorprendentemente conservadora a respecto de un *descubrimiento* que rompía con la *intuición* del momento.

Stendhal tuvo durante su juventud (más o menos hasta los dieciocho años) una absoluta obsesión con las matemáticas. Su carácter escrutador e incisivo y su militancia racionalista queda patente en la «Vida de Henry Brulard» de la que a continuación reproducimos algunos fragmentos:

> *«La base del mi entusiasmo por las matemáticas hay que buscarla principalmente en mi horror por la hipocresía que, para mi, eran mi tía Séraphie, madame Vignon y sus curas. Bajo mi punto de vista la hipocresía era imposible en matemáticas y, en mi simplicidad juvenil, pensaba que lo mismo ocurriría en las otras ciencias a las que oyera decir que se podían aplicar. Cual sería mi decepción cuando me di cuenta de que nadie podía explicarme que menos por menos da más;*

(-) x (-)=(+))! (una de las bases fundamentales de la ciencia llamada álgebra).

E incluso había algo mucho peor que el que no me aclarasen esta dificultad (que sin duda es justificable, pues conduce a la verdad), y es que me la explicaban con razones evidentemente poco claras para aquellos que trataban de hacerlo... Intenté, por lo tanto, consultar los artículos matemáticos de d'Alembert en la Enciclopedia, pero su tono de fatuidad y la ausencia de culto a la verdad me sorprendieron enormemente, y por lo demás saqué muy poco en limpio. ¡Con que ardor adoraba yo entonces la verdad! ¡Con que sinceridad la creía la reina del mundo en el que iba a adentrarme! No le veía más enemigos que los curas.

Si (-) x (-) = (+) me ocasionara muchos quebraderos de cabeza, es fácil imaginar el calvario que tuve que sufrir cuando comencé la Estática de Louis Monge. Nada más iniciar la geometría se dice. 'Se da el nombre de paralelas a dos líneas que, prolongadas hasta el infinito, no se encontrarán jamás'. Pues bien, al comienzo de la Estática, ese insigne animal de Louis Monge decía: «'Dos líneas paralelas pueden llegar a encontrarse si se prolongan hasta el infinito'.

Tuve la impresión de estar leyendo un catecismo y de los más toscos. En vano pedí explicaciones ya que como única respuesta obtuve 'Hijo mío eso ya tendrás ocasión de saberlo más adelante'. Estuve a punto de abandonar. Un confesor hábil y buen jesuita podría haberme convertido en ese momento sin más que comentarme esta máxima: 'Ya ves que todo es error, o más bien, que no hay nada falso ni nada verdadero: todo es puramente convencional. Adopta, por lo tanto, el convencionalismo que más apto te resulte para triunfar en el mundo'.»

El empecinamiento del adolescente Henry Brulard para, desde su entendimiento, dotar a las matemáticas de una base consistente y inteligible (aun más profundo después de que cayera en sus manos el «Cours de mathématiques» de Bezout, manual al uso en aquella época para preparar el ingreso en la Politécnica, ininteligible a los ojos de Stendhal), le hizo entrar en contacto con Louis-Gabriel Gross —geómetra de Grenoble, conocido por su enorme capacidad en matemáticas y por sus hondas convicciones republicanas—, de la mano de quien reconoce que por fin llegó a apreciar el porqué de las cosas; *«aquello ya no era una receta de farmacéutico caída del cielo para resolver ecuaciones».*

Reconoce Stendhal, en el umbral del 1800, que su pasión por la matemática era total y que prácticamente no le quedaba tiempo para otra cosa. Aunque aventurarse a pontificar sobre la incidencia que el pensamiento matemático tuvo en su obra no es una cuestión fútil, podemos resaltar algunos rasgos elementales. Sin ir más lejos, Gross aparece como personaje —con su mismo nombre— en «El rojo y el negro» y en «Lucien Leuwen» bajo el nombre de Gauthier. Tal vez la contundencia con que la luz de la razón se refleja en sus libros sea producto en gran medida del ejercicio de rigor que adoptó en sus años mozos al tratar de establecer un discurso matemático autosuficiente, desposeido de los aditamentos metafísicos por aquellas al uso, en los que, sin ir más lejos, Bezout —un «animal» para Stendhal— era un maestro.

Los casos anteriores son una muestra de escritores con grandes conocimientos matemáticos de los que aun está por ver la influencia en profundidad que las matemáticas tuvieron en su obra. Pero hay otra faceta de la conexión matemáticas-literatura que atañe no tanto a la instalación de los autores en la disciplina, cuanto a la introducción de constructos matemáticos explícitos e implícitos en sus obras, tanto en las historias que cuentan como en el entramado estructural.

En «La Cifra» Alexande Arnoux no atempera el azar al modo de Mallarmé mediante la creación humana[5]. El matemático con que se encuentra el protagonista (secretario de un intelectual que devora días y noches en el trance de escribir una obra inmensa) niega el azar explicando que cada hombre está caracterizado por una tonalidad, un color aritmético, un número, tal que su destino y actos están contenidos y preformados en él. Reinterpreta el eterno problema quitándole todo carácter abstracto. La *summa* en ciernes, que el intelectual intenta escribir, es desplazada en la cabeza del secretario por un objetivo obsesivo: la caja fuerte del despacho, de la que para abrirla tiene que dar con los cuatro dígitos de la clave: ¿cuáles fueron las variables ocultas que llevaron a su patrón a establecer el código secreto?

Todo hace suponer que el autor está en el meollo de las polémicas científicas del momento: azar-necesidad, mecánica cuántica-física clásica..., y así, cuanto menos en la ficción , se da el gusto de encorsetar el problema, invertirlo y resolverlo en ciento cincuenta páginas. Quizás Arnoux hubiera realizado estudios reglados en matemáticas —no nos consta— pero de todas formas se documentó para este fin con el rigor y profundidad decimonónica tal y como lo hizo en la química del momento el Flauber de *Bouvard y Pécuchet.*

5 Mallarmé necesitaría un capítulo a parte dado que nada más hay que matemática en su contraposición entre determinismo y azar, pero sería muy pretencioso por nuestra parte intentar decir algo nuevo después del magistralmente poético —por lo tanto matemático en el sentido de Badiou— Necesidad y Azar (de Parménides a Mallarmé) de García Bacca.

Que decir de toda la obra de Lewis Carol, o de lo que hace Perec en «La vida instrucciones de uso». ¿Qué es lo que hace de ella una novela memorable; su tejido estructural o las histórias que se cuentan a lo largo de sus cientos de páginas? En el mismo saco podríamos meter las novelas de Umberto Eco y algunos relatos de Italo Calvino en los que el juego recursivo y estructural llega a ser completamente dominante.

Hacia los años sesenta se crea OULIPO —Taller de literatura potencial— del que entre otros formaban parte F. Le Lionnais, R. Queneau, Perec y I. Calvino. En las aproximaciones combinatorias a la literatura que llevaron a cabo hay que encuadrar las que se pueden considerar dos obras emblemáticas: los Cien billones de Sonetos de Quenneau —10^{14} sonetos potenciales de los que pretende que todos tengan sentido; lo que supone muchísimo más texto que el que comprende la restante literatura mundial— y *La Disparation* de G. Perec —novela que a lo largo de trescientas páginas no contiene una sola «*e*». El mismo Perec defiende la sensatez y seriedad de la empresa por ellos emprendida y dice que ciertos condicionantes estructurales, junto a la artificiosidad, fueron los que llevaron a Rabelais, Joyce, Borges o Calvino a sondear todas las posibilidades de un idioma.

La tradición oral y los mitos populares que se fueron transmitiendo hasta nuestros días se construyeron sobre estructuras fijas, sobre una base axiomática que tiene asociada sus reglas implícitas de derivación, que permiten un número inmenso de combinaciones (la potencialidad infinita chocaría con la barrera semántica). Los trabajos de Vladimir Propp sobre los cuentos tradicionales rusos y de Claude Lévi-Strauss sobre ciertas tribus brasileñas, corroboran que tanto las operaciones narrativas como las matemáticas no pueden ser muy distintas de un pueblo a otro en sus cimientos. O sea, las operaciones primigenias matemáticas y literarias pueden diferir en muy poco; si existe una *etno-matemática* también existirá una *etno-literatura* con substrato estructural prácticamente idéntico. En la evolución de la sociedad, por lo que a la literatura se refiere, el juego combinatorio devino en lenguaje preconsciente, abriéndose así una vía de libertad que acerca el espíritu crítico al pensamiento colectivo. ¿Tendrá la matemática que permanecer al margen de este proceso?

En aras del ejercicio de una verdadera interdisciplinariedad (más allá de las relaciones tópicas física-matemáticas o economía-matemáticas), la literatura como fenómeno cultural —tan cultural como las primeras actividades de conteo y clasificación en las edades más tempranas— se debe utilizar como factor de aproximación a determinadas nociones matemáticas. Se trataría de esbozar un enfoque reintegrador dirigido a superar la falsa división entre las matemáticas y las «letras» —tan estético puede ser un teorema como un poema, la cuestión es entender/disfrutar con cada una de las dos cosas— completamente artificiosa a estas alturas de la historia. En esta línea se nos ocurre proponer el trabajo sobre determinados textos, para que surja un debate de final imprevisible, del cual pretendemos cuanto menos que incida en que no tiene sentido en un sujeto autodeterminado, que asuma historia y sociedad, separar las matemáticas de las letras. Los textos sobre los que llevar a cabo la reflexión podrían incluir entre otros: los antedichos «Cien billones de sonetos» de Queneau, «Si una noche de invierno un viajero» y «Tiempo cero» de Calvino, páginas escogidas de «Los hermanos Karamazof», «El Aleph» de Borges, etc. Sería también ésta una buena ocasión para que más de un profesor de matemáticas se reencontrase con el mundo, perdiéndole el miedo a la prosa no simbólica.

Las consideraciones hechas anteriormente sobre matemáticas y literatura —que podrían, por ejemplo, ser extendidas a la pintura o a la música—, alimentan en nosotros la esperanza de que la barrera establecida entre el mundo de la matemática y el de las artes y humanidades pueda permeabilizarse, convirtiéndose el muro de la incomprensión en una frontera difusa. Experiencias como las de Quenneau o Calvino inciden directamente en el flujo de la comprensión y el disfrute del uno al otro mundo.

5. Las matemáticas como puente entre las ciencias y las letras. La componente estética

Algo muy semejante le acontecería a las matemáticas en relación con el mundo de la ciencia y la técnica, con aquellos que utilizan cotidianamente las matemáticas como rutina. Algunos de ellos —con seguridad una minoría— se encontraran a veces con situaciones de las que tan sólo se puede salir profundizando en los conceptos que legitiman los automatismos calculísticos; el caos y la complejidad se presentan con más frecuencia de la deseada en problemas aparentemente inofensivos, lo que implica una investigación en las raíces que puede llevar al usuario de la matemática aplicada al contemple y asimilación de resultados de «gran poder» estético. De este modo la frontera del estado matemático con el mundo científico-técnico también se permeabilizaría.

Lo cierto es que en este caso si que existen abundantes materiales en los que fundamentar líneas de actuación y la toma en consideración de la misma génesis histórica de los conceptos sería suficiente. Es de esperar que en un plazo prudencial de tiempo, vencidos los últimos coletazos de la moda bourbakiana, las cosas vuelvan a su sitio.

Si se logra introducir en el sistema el goce estético como fin irrenunciable, la matemática dejaría de ser el terreno de nadie, que separa a la ciencia del arte, para convertirse en un hogar común, donde ciencia y arte se complementarían. Sería una manera de comenzar a deshacer el mito de que existe una gran parte de la población capaz de disfrutar con la música, la literatura, etc., pero que tiene absolutamente vedada la matemática.

Hay quien trata de buscar las características comunes, innatas, de la minoría que goza con el hecho matemático, «este carácter de belleza *y elegancia, que son capaces de desarrollar en ciertas personas una suerte de emoción estética*»[6]. Nosotros, sin embargo, consideramos que la sensibilidad estética, incluso en el mundo de las matemáticas, puede inculcarse a través de situaciones perturbadoras de la suficiente entidad. La desgracia es que la elite matemática cree en la sensibilidad estética pero como un reducto de la divinidad, de los grandes matemáticos que en el mundo han sido —o son—, mientras que, al contrario, en las presentaciones de las matemáticas que hace la mayoría del profesorado o los investigadores, prevalece el tufo semi-formal sin quedar rastro de la plasticidad primigenia.

Esto no quita que pueda existir una didáctica por experimentar —desde Pitágoras hasta Galois,....— en la que el enfoque estético sea fundamental, aunque la reacción del sistema dominante pueda ser lo suficientemente fuerte como para ahogar cualquier iniciativa en este sentido. Y es que el aislamiento de la componente estética en el mundo de las matemáticas es una cuestión sobre la que no es fácil ponerse de acuerdo por encima de toda crítica.

En el campo de la música —lo mismo que en la literatura y la pintura— existen textos asequibles a cada nivel en los que se pueden fundamentar los «méritos» de la música de Bach o de la pintura de Bacon. Y si la música pop, aun en su versión más heavy puede ser la antesala de entrenamiento para el posterior disfrute de la música clásica, ningún paralelismo puede establecerse con el mundo de la matemática, donde además de no existir crítica tampoco es posible ninguna aproximación al margen de lo que se haga en las aulas.

Pero, volvamos a insistir, hay áreas del saber que interrelacionan las matemáticas con la estética tanto en la vertiente de la matemática como soporte de la propia teoría estética, como la de la aplicación de las matemáticas al arte. Para tratar de analizar la matemática tal y como se hace con el arte habría que encontrar respuesta a la pregunta fundamental: ¿cómo se establece el criterio de belleza en matemáticas? El problema se perpetúa toda vez que aquellos que obtienen disfrute y aprecian la estética no tienen ningún interés en analizar la cuestión.

Las obras de arte (arte-factos e ideas) existen hoy como elementos de determinadas teorías artísticas —al igual que la existencia del electrón está limitada a la física de partículas—, que soportan un mundo institucional complejo, que además de los artistas también comprende las personas versadas en arte (críticos) y a los estudiosos de la historia del arte. En este contexto, ¿qué es lo que hace que un arte-facto sea considerado obra de arte? Sencillamente, que una parte significativa del entramado institucional dé el visto bueno. Nada de esto existe

6 Poincaré (1929). *The foundations of Science*. New York: Science Press. P. 386.

para las matemáticas (fuera del ensimismado mundo de las minorías; además...donde están los críticos?), con el agravante de que para el mundo del arte existen aproximaciones intuitivas que ayudan a que los ciudadanos cultos perciban una gran parte de la producción artística de los diversos frentes, quedando sin embargo cualquier constructo matemático al margen de las masas.

Para sacar entonces a las matemáticas de su aislamiento habría que asumir un enfoque que tuviese en cuenta las realizaciones culturales de todo tipo —no sólo las técnicas y *científicas*—, sobre todo aquellas que puedan excitar la componente estética induciendo a su comprensión e integración. Para experimentar globalmente en esta línea se necesitaría un nuevo punto de vista y una nueva generación de profesores (tanto a nivel primario como secundario y universitario) que en su formación fuesen tocados en lo más hondo por determinadas *sensaciones estéticas*, de tal manera que pudiesen transmitir a sus discípulos unas migajas de la excitación experimentada en carne propia, independientemente de la transcripción lingüística o *imaginística* que utilizasen para eso.

El día en que al ciudadano medianamente culto le cueste tanto trabajo admitir su ignorancia en matemáticas como en literatura o música, las cosas comenzarán a cambiar. Mientras, el seguir ejerciendo la sapiencia compartimentada será un síntoma claro de escribir al dictado de la división del trabajo capitalista, desechando la posibilidad de la complementariedad crítica y desalienante, y negando una de las más diáfanas vías al proceso de autodeterminación del sujeto.

REFERENCIAS

ALTHUSSER, L. (1969). *La revolución teórica de Marx.* Siglo XXI.

BEGLE, Y. G. (1979). *Critical variables in mathematics education.* Washington: NCTM & MAA.

BELL, Y.T. (1985). *Historia de las matemáticas,* México: Ed. Fondo de cultura Economica.

COULON, L. (1988). *La Etnometodología.* Madrid: Ed. Cátedra.

D'AMBROSIO, U. (1985). Ethnomathematics and his place in the history and pedagogy of Mathematics, *For the Learning of Mathematics.*

ENGELS, F. (1970). *Anti-Düring.* Madrid: Editorial Ciencia Nueva.

GARFINKE (1984). *Studies in etnomethodology.* Cambridge U. P.

LE LIONNAIS, F. (ed.). (1963). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* Buenos Aires: Ed. EUDEBA.

MARX, K. (1973). *El Capital.* México: FCE.

NUNES, T. Etnomathematics and Everyday Cognition. The Handbook of Research in Mathematics Teaching.

POINCARE, H. (1944). *La Ciencia y el Método.* Madrid: Espasa Calpe.

STENDHAL (1987). *Vida de Henry Brulard.* Madrid: Ed. Alfaguara.

VYGOTSKI, L.S. (1962). *Tought and language,* Cambridge (MA): MIT Press.

ZIMMERMAN, D. H. Y WIEDER, D.L. (1970). Etnomethodology and the problem of order. En J.D. Douglas (ed.) *Understanding everydau life.* Londres: Rotledge & Kegan Paul.

Resumen:

La matemática está aislada en el contexto escolar. Constituye un "terreno de nadie" entre las disciplinas científicas y humanísticas.

Se propone un nuevo papel para las matemáticas: que sirvan como saber reintegrador entre las ciencias y las letras. Se dan algunas ideas de cómo pueden desempeñar éste papel en concreto, se establecen vínculos entre las matemáticas y la literatura.

Palabras clave: Estética y Matemática. Ciencias-Letras.

Abstract:

Mathematics is isolated in the school context. It is regarded as "no man's land" somewhere between Science and Humanities.

A new role to be played by Mathematics is suggested: it sould be used as an integrative knowledge between Science and Humanities. Some ideas are given on how Mathematics can play this new role, more specifically, how new connections can be established between Mathematics and Literature.

Key words: Aesthetic and Matematics. Science and Humanities.

Xenaro García Suárez

Dpto. de Estatística

Universidade de Vigo

C/ Oporto, 1

36201 VIGO

Los supuestos en la enseñanza de la matemática

María Cecilia Papini
María Rita Otero
Inés Elichiribehety

Introducción

ES muy frencuente observar, en la actualidad, un cambio notable en las prácticas de enseñanza de la matemática y en los libros de texto de este área en la escuela media.

Hace no muchos años enseñar matemática consistía en transmitir al alumno unas cuantas definiciones, leyes, propiedades, algoritmos, etc. Entonces, hacer matemática era manejar hábilmente una serie de símbolos de acuerdo a unas cuantas reglas explicitadas. Esta manipulación simbólica tenía poca relación con problemas que tuvieran algún significado para el alumno que desarrollaba todo este sistema de símbolos mencionado en forma paralela y sin conexiones con sus otros conocimientos. Unos pocos problemas se utilizaban como supuesta «aplicación» al finalizar el capítulo de enseñanza. Los libros de texto de esta época referida muestran características muy similares a esta práctica descripta.

En forma casi reaccionaria y aduciendo el propósito de cambiar los supuestos empiristas y enciclopedistas del período anterior —que conciben al sujeto cognoscente como un receptáculo vacío al cual ingresan los datos del mundo externo a través de la percepción sensible y sin aporte o construcción personal— surgen otras ideas supuestamente contrarias, o al menos distintas.

Comienzan a observarse algunas manifestaciones de cambio en un sentido casi opuesto al anterior, tanto en la práctica escolar como en los libros de texto y en algunos artículos de didáctica de la matemática. Ahora, enseñar matemática es ofrecer al alumno buenas situaciones problemáticas, y hacer matemática es resolver problemas, principalmente, situaciones reales o extraídas de otras asignaturas.

En este artículo se tratará de llevar al plano de la discusión las posibles causas de este cambio, los supuestos de tipo psicológico, epistemológico y didáctico que se estarían manejando no siempre de manera explícita y algunas de las consecuencias que se observan.

Algunos supuestos psicológicos y sus posibles consecuencias epistemológica

En la actualidad se observa una manifiesta adhesión, casi unánime, a las ideas constructivistas, pareciera ser el paradigma dominante en las didácticas y en el decir de la práctica escolar, que viene a «salvar» la enseñanza de los supuestos psicológicos catalogados como empiristas, conductistas.

Dentro de este marco, las ideas relativas a la acción parecen ser las más citadas y utilizadas en educación. Esta acción de la que tanto se habla, se termina confundiendo frecuentemente con una mera manipulación y observación de situaciones u objetos reales.

Por lo tanto, y paradójicamente con las ideas de cambio originales, este tipo de prácticas termina por transformarse en algo muy cercano a un *empirismo gnoseológico*[1], cayendo en el mismo error del que se acusaba a la enseñanza tradicional.

Matthews (1994) afirma: «*Cualquier epistemología que formule el problema del conocimiento en términos de un sujeto que observa un objeto y se pregunta hasta dónde lo que ve refleja la naturaleza o esencia del objeto...*», lo que subyace es una postura aristotélica —de correspondencia o adecuación entre el conocimiento y los objetos del mundo— o más generalmente una postura empirista empirista.

Teniendo en cuenta esta breve descripción se podría formular la siguiente pregunta: ¿es posible detectar supuestos implícitos de tipo empirista, en algunas de las corrientes más difundidas del constructivismo, que redundarían en prácticas escolares también empiristas?

1 Al hablar de empirismo gnoseológico nos referimos a esa postura filosófica que sostiene que la validez de todo conocimiento reside en la experiencia. Algunos empiristas como Locke sostuvieron que conocer es pura vivencia, y que estas vivencias nos remiten a la existencia de un mundo *real*, situándose en una posición muy próxima a la del realismo aristotético. Otros, sin embargo, son *idealistas* como Berkeley quien afirma: "En cuanto a nuestros sentidos, por ellos obtenemos el conocimiento sólo de nuestras sensaciones, ideas o de esas cosas que son inmediatamente percibidas por los sentidos, llámeselas como se quiera: pero ellos *no* nos informan de que las cosas existan sin la mente, o sin percibirlas" (García Morente, 1938).

En un intento por responder esta pregunta vamos a seguir el análisis realizado por Matthews (1994). En principio se tratará de especificar las características de alguna de las corrientes del constructivismo.

El constructivismo y sus posibles conexiones empiristas

Si bien hay muchos matices y corrientes en el constructivismo (para un análisis detallado ver Matthews, 1994), lo que se denomina el *corazón constructivista* puede resumirse en dos afirmaciones básicas, que algunos autores extienden a una tercera.

La primera afirmación constructivista establece que *el conocimiento no es pasivamente recibido sino activamente construido por el sujeto cognoscente*, de acuerdo con este principio no es posible transferir ideas a la mente de los alumnos, sino que estos construyen sus propios significados del mundo.

La segunda premisa afirma que *la función de cognición es adaptativa y permite que los aprendices construyan explicaciones viables de la experiencia.*

En la enseñanza de las Ciencias y de la Matemática, el constructivismo es frecuentemente reducido al constructivismo radical de von Glasersfeld. En opinión de R. Duit (1993-1994) y de M. Moreira (1995), Glasersfeld incluye implícitamente un tercer principio: *el proceso de construcción de significados tiene lugar en el medio social del cual el individuo es parte.* Se consideran viables aquellas construcciones que resultan útiles para el constructor.

Es bien sabido que el constructivismo es un movimiento heterogéneo, y que ciertas posiciones constructivistas son acusadas de estar centradas en el sujeto, basadas únicamente en la experiencia y de asumir una posición relativista, que consiste en afirmar que nuestro conocimiento no nos informa en absoluto acerca del mundo, sino sólo de nuestras experiencias y de cómo están mejor organizadas (Glasersfeld, 1987).

La premisa uno, que acepta la actividad del sujeto en oposición a asignarle un rol pasivo, de espectador, plantea sin lugar a dudas una diferencia fuerte con el empirismo. Reconocer la actividad del sujeto en la construcción del conocimiento, no supone en principio ningún compromiso con la verdad (validez) de nuestra construcción.

La posición epistemológica que subyace en la premisa dos es que *no se puede conocer la realidad.* Siguiendo a Matthews (1994) «La argumentación en un único paso que se sigue desde la premisa psicológica *la mente es activa en la adquisición del conocimiento* hasta la conclusión epistemológica *no podemos conocer la realidad*, es endémica de los escritos constructivistas. Lerman habla en nombre de otros muchos cuando dice de las dos tesis —indicadas anteriormente como 1 y 2— que las conexiones entre las hipótesis 1 y 2 parecen ser muy fuertes».

Esta implicación es válida sólo si se asume la teoría de la verdad como correspondencia de Aristóteles. Dicho de otro modo, si se está pensando en un sujeto que construye su propio conocimiento activamente y esto le quita la posibilidad de conocer el mundo tal cual es, se está definiendo al conocimiento como reflejo, copia o isomorfismo de las ideas con los objetos. Esto constituye un compromiso con una teoría aristotélico-empirista del conocimiento. Al considerar esencial al conocimiento la correspondencia entre las ideas y la realidad, y advertir los problemas que esto genera, algunos constructivistas caen en el relativismo, que sólo se sigue si se conserva el paradigma empirista.

Otra posible observación a las premisas citadas reside alrededor del concepto de viabilidad, cuando se admite como viables aquellos conocimientos que son útiles al sujeto cognoscente. Concretamente, si se piensa que sólo son viables para el alumno aquellos conocimientos útiles como herramientas en la resolución de algunos problemas, o sea validando conocimientos matemáticos en función de esta posibilidad, se cae en posiciones de tipo individualista y relativista, calificadas de anticientíficas por algunos autores.

En principio pareciera haber motivos que nos hagan pensar que algunas ideas constructivistas estarían teñidas de un cierto empirismo, hecho que se traslucirία en la práctica escolar. Además, un dato a tener en cuenta es el de la viabilidad, pues puede ser la causa del fenómeno que se observa en las aulas: con la excusa de la provisoriedad añadida a la necesidad de significatividad de los conocimientos, cada vez parece más difícil arribar a saberes científicos, motivo por el cual nos quedamos sólo con conocimientos de tipo espontáneos.

Para aportar algunas ideas más sobre el rol del problema en la enseñanza de la matemática que se propone actualmente, se recurrirá a algunas ideas de investigadores que comparten una misma teoría en didáctica de la matemática, que se ha gestado en estos últimos veinte años en Francia y que tiene gran incidencia en nuestro país.

Algunos conceptos de la teoría de la didáctica de la matemática francesa

Algunos de sus iniciadores, matemáticos como Brousseau, Chevallard, Douady, se han planteado la necesidad de ocuparse de los problemas de la transferencia de los saberes matemáticos, de una manera científica. Teniendo en cuenta cuestiones epistemológicas como la definición del objeto de conocimiento, la metodología de investigación, la invalidez de los conocimientos obtenidos, las posibilidades y condiciones de aplicación en la enseñanza de estos nuevos conocimientos obtenidos en la didáctica de la matemática.

Michèle Artigue (1995) afirma que la didáctica de la matemática francesa aparece como más unitaria, más teorizada y aproximándose a los fenómenos de enseñanza en forma global, sin realizar segmentaciones independientes que dejen escapar la complejidad real del fenómeno clase.

Brousseu (1986) realiza una aproximación a través de las «situaciones» que terminan siendo objeto de estudio de la didáctica de la matemática, modelizándolas a través de la teoría de juegos y de la teoría de la información.

Distingue cuatro tipos de situaciones que secuencia en el proceso didáctico de la siguiente manera:

1. *«Las situaciones de acción, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.*

2. *Las situaciones de formulación, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones, entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.*

3. *Las situaciones de validación, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.*

4. *Las situaciones de institucionalización, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.»* (Gálvez, G., 1985).

Se puede observar que las situaciones de acción no caen en la trampa empírica de la observación o de la manipulación pues se las deja ver como fenómenos de acción intelectual, de enfrentamiento con el problema, que luego van a ser interiorizados y redimensionados socialmente en las situaciones de formulación.

Además, parece estar claro el objetivo de arribar al saber matemático[2] puesto en juego para ser institucionalizado, y no conformarse solamente con cualquier procedimiento alternativo —por más valioso que este sea— alcanzado por los alumnos.

Michèle Artigue (1989) cita a Y. Chevallard (1982) quien explica las causas de la necesidad de generar una *«historia científica»* propia que derrote esa *«ideología de la innovación»* que impera en el sistema educativo.

Cuando dicen *«ideología de la innovación»* se refieren a la necesidad permanente de efectuar cambios en la enseñanza y en particular en las clases, justificados o validados solamente por el prestigio de quien los promueve, quitando la posibilidad de ser evaluados, o verificados científicamente. Luego las innovaciones son desechadas por motivos similares a los del proceso de la moda, sin ninguna explicación.

---

2 Se está considerando una diferencia de significado entre conocimiento y saber. Saberes son aquellos conocimientos socialmente reconocidos como científicos, pues han surgido y han sido validados con aquellos métodos propios de la comunidad científica.

Estos investigadores, critican fervientemente ese tipo de metodologías externas que se basan en la observación directa de la clase, que realizan comparaciones con grupos testigos y luego pretenden convencer mediante estadísticas, pues consideran que este tipo de metodología no logran atrapar la complejidad del sistema estudiado (Artigue, 1989).

Como alternativa a este tipo de metodologías, que podrían considerarse un tanto positivistas pues sólo confían en la obtención de algunos datos manejados estadísticamente y obtenidos de la observación directa de alguna de las variables intervinientes en una clase y sin tener en cuenta las complejas relaciones de ésta con las demás variables, Artigue propone un proceso experimental para abordar el estudio de las situaciones didácticas de cuatro fases, al que denominan *ingeniería didáctica.*

La primera fase, de los *análisis previos*, incluye una serie de análisis alrededor de los contenidos que se quieren enseñar, como por ejemplo análisis epistemológico, de la enseñanza tradicional y sus efectos, de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos, etc.

En la segunda fase el investigador decide actuar sobre algunas de las variables del sistema, realiza la *concepción de la secuencia didáctica* que ponga en funcionamiento el saber buscado (génesis artificial o escolar del conocimiento) y los *análisis a priori*, es decir, prevé que es lo que puede ocurrir con la aplicación de la secuencia.

Las fases tres y cuatro se proponen la *experimentación de la secuencia*, los *análisis a posteriori de los datos obtenidos en la experimentación* y, por último, la *validación* de las hipótesis formuladas en la investigación, que se realiza confrontando los análisis a priori con los análisis a posteriori.

Artigue dice: «*El proceso de validación interna que se encuentra en juego aquí no cae en las trampas de los esquemas usuales de validación estadística asociados con la experimentación en clase...*».

No parece pertinente calificar de empiristas las ideas manejadas por esta línea de investigadores ya que parecen evidentes las intenciones de producir conocimiento en este dominio de la didáctica teniendo en cuenta los requerimientos científicos actuales.

Entonces nuevamente se plantea la necesidad de preguntarse por qué al intentar plasmar en el aula estas ideas de la didáctica de la matemática se cae en metodologías empiristas que no representan en nada al saber matemático al que supuestamente se pretende arribar.

Quizás se pueda encontrar otra variable del problema —además de la psicología que en algunos casos parece ocasionarlo o al menos justificarlo— en la definición de *saber matemático* puesta en juego y no siempre claramente explicitada.

Acerca de la definición del saber matemático

Si se trata de buscar una definición epistemológica contemporánea, casi invariablemente, se encontrará que la matemática es una ciencia formal, axiomática y deductiva.

«*La lógica y la matemática tratan de entes ideales, estos entes, tanto los abstractos como los interpretados, sólo existen en la mente humana*». En cuanto al método «*las ciencias formales se contentan con la lógica para demostrar rigurosamente sus teoremas (los que sin embargo, pudieron haber sido adivinados por inducción común o de otras maneras)...*» «*La matemática y la lógica son, en suma, ciencias deductivas. El proceso constructivo, en el que la ex-*

periencia desempeña un gran papel sugestivo, se limita a la formación de los puntos de partida (axiomas). En matemática la verdad consiste por esto en la coherencia del enunciado dado con un sistema de ideas admitido previamente: por esto, la verdad matemática no es absoluta, sino relativa a ese sistema...» (Bunge, 1995).

Esta concepción de ciencia matemática pareciera ser la que se manejaba en la enseñanza de la matemática tradicional. En esta se pretendía que el estudiante captara todo este cuerpo de axiomas, definiciones, teoremas para luego transformarse en un usuario competente. Como se sabe la experiencia muestra que esto no fue así.

Desde otra perspectiva González Urbaneja (1991) observa cuestiones de las que hemos sido testigos los profesores de matemática de las últimas décadas: *«La capacidad crítica del estudiante no se despierta con la exposición cerrada y acabada de la ciencia estática de los manuales, que, ocultando el sinuoso, zigzageante y a veces penoso camino de la creación científica, no estimula el desarrollo de valores científicos en el sujeto discente...»*.

En este mismo artículo se cita a Lakatos (1978) quien también critica fervientemente esta tendencia lógico-deductiva que se ha apropiado de la matemática a partir de Bourbaki: *«De acuerdo con el ritual euclídeo, el estudiante se ve obligado a asistir a esta conjura sin hacer preguntas ni sobre el trasfondo ni sobre cómo se realiza el juego de manos (...) Si se pregunta sencillamente cómo es que esas definiciones, esos lemas y el teorema pueden preceder a la prueba, el autor del conjuro lo relegará al ostracismo por esta muestra de inmadurez temática»*.

«Las matemáticas se presentan como un conjuro siempre creciente de verdades eternas e inmutables, en el que no pueden entrar los contraejemplos, las refutaciones o la crítica. El tema de estudio se recubre de un aire autoritario (...) El estilo deductista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenen al olvido mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada.»

Contradiciendo esta posición Bunge afirma: *«Por ello, mientras las teorías formales pueden ser llevadas a un estado de perfección (o estancamiento), los sistemas teóricos relativos a los hechos son esencialmente defectuosos; cumplen, pues, la condición necesaria para ser perfectibles.»*

La diferencia entre ambos autores y su concepción de la matemática como ciencia, se centraría en que para Bunge el contexto de descubrimiento es ámbito de la sociología de la ciencia y no de la epistemología. Sin embargo, desde una perspectiva didáctica, la posición de Lakatos cobra especial interés.

Pareciera, entonces, que rescatando estas críticas de una matemática formalista y a-histórica, la didáctica de la matemática ha tratado de incluir dentro de la ciencia que se pretende enseñar en la escuela, dicho contexto de descubrimiento. Posiblemente sea, como dice González Urbaneja (1991) un intento de aplicación del método genético: *«contextualizar históricamente, realizando una reconstrucción de la historia que haga patente el conocimiento de las preguntas y necesidades que motivaron en su momento histórico la introducción de un concepto nuevo, así como las dificultades intrínsecas inherentes al alumbramiento de algunos conceptos y a la solución de algunos problemas...»*

En consecuencia, parece estar explicada de algún modo la causa de la invasión de la resolución de problemas como supuesto método de enseñanza matemática, sólo que por cuidar la cuestión del origen de la ciencia se han descuidado otras características que también la constituyen, como por ejemplo su método de validación esencialmente deductivo.

En otras palabras, se han logrado incluir esas situaciones sumamente valiosas mediante las cuales algunos científicos han logrado «saltos creativos», desde experiencias particulares a ideas generales, y donde el método es en principio inductivo. Sin embargo, se han excluido, casi totalmente de las cláses de matemática procesos de tipo deductivo que también la caracterizan.

Según Douady (1995): «*Saber matemáticas implica dos aspectos. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de algunas nociones y teoremas matemáticos para resolver problemas e interpretar nuevas situaciones. En un funcionamiento científico como éste, las nociones y teoremas matemáticas involucrados tienen un status de herramienta. Las herramientas están inscritas en un contexto, que a su vez está influido por alguien (o un grupo en un momento determinado). Las situaciones o los problemas en los cuales evolucionan las nociones matemáticas generan significado para esas nociones desde un punto de vista que llamaremos semántico.*

Saber matemática también significa identificar las nociones y los teoremas como elementos de un corpus reconocido social y científicamente. Al mismo tiempo es formular definiciones, enunciar los teoremas de ese corpus y demostrarlos. Por esto, las nociones y los teoremas matemáticos en cuestión tienen un status de objeto. Están descontextualizados, despersonalizados y son atemporales. El trabajo de descontextualización y despersonalización participa en el proceso de capitalización o apropiación del conocimiento.»

Estas últimas ideas parecen plasmar o definir al conocimiento matemático desde una posición más cercana a Lakatos que a Bunge y Bourbaki y como posiblemente debiera ser acercado al alumno.

Consideraciones finales

Finalmente, debiéramos intentar arribar a algunas ideas que nos permitan orientar la práctica de la enseñanza.

Luego del análisis realizado vale afirmar que algunas corrientes constructivistas contendrían contradicciones internas que desembocarían en ideas de tipo empiristas, paradójicamente con lo que se postula en principio. Particularmente, si se cree que el conocimiento es construido por el sujeto cognoscente y esto no le permite captar la realidad tal cual es, se está pensando en un conocimiento aristotélico de correspondencia o reflejo con la realidad.

Por otro lado, el hecho de haber fracasado la intención de la enseñanza tradicional de transmitir a los alumnos la ciencia formal, estructurada en el último siglo por Bourbaki, permite inferir que la metodología de enseñanza utilizada no era la más adecuada y que además esta visión de la matemática no la representa completamente. Por el contrario, deja de lado su historia, su camino, quizás la parte más interesante o motivadora para el alumno.

Sin embargo, esta omisión tampoco da derecho a quedarnos con las interesantes situaciones que han dado origen a los saberes matemáticos en desmedro de la apropiación de sus conocimientos más potentes (definiciones, propiedades, teoremas, etc.) y de su método deductivo característico.

Utilizando los términos de Douady, no debiéramos quedarnos sólo con el status matemático de herramienta, o con la resolución del (o los) problemas particulares. Sino, hacer evolucionar al alumno a través de esas situaciones que ponen en funcionamiento un determinado conocimiento para que pueda arribar progresivamente al significado del saber matemático cuya apropiación se pretende.

Este doble carácter de instrumento y objeto está explícitamente contemplado en las formulaciones de los expertos en didáctica de la matemática. Sin embargo, su relevancia no es adecuadamente captada en la práctica escolar concreta que permanece sesgada al carácter instrumental.

Por último, resulta importante tener en cuenta la necesidad de llevar al plano de la reflexión y discusión, todas estas cuestiones alrededor de la enseñanza de la matemática. Generar espacios en los que se acuerde o convenga, cuál es la ciencia que se quiere enseñar, cuál o cuáles concepciones de aprendizaje se está considerando que explican mejor los aprendizajes de los alumnos, y en función de estas ideas cuáles son las elecciones o decisiones que el docente debe tomar en el aula para posibilitar una mejor apropiación del conocimiento.

BIBLIOGRAFÍA

ARTIGUE, Michèle (1989). *Ingeniería didáctica*, IREM de París 7.

ARTIGUE, Michèle; Douady, Regine y otros (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamericana.

BUNGE, M. (1995). *La Ciencia. Su Método y su Filosofía.* Buenos Aires, Argentina: De. Sudamericana.

BROUSSEAU, Guy (1986). *Fondements et methodes de la Didactique des Mathématiques.* Bordeaux tesis de graduación.

CHALMERS, A. (1982). *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?* Argentina: S. XXI.

CHEVALLARD, Yves (1982). *Sur língénierie didactique.* Texto preparado para la Segunda Escuela de Verano en Didáctica de la Matemática. Orléans.

CHEVALLARD, Yves (1985). *La Transposición Didáctica del conocimiento erudito al conocimiento enseñando.* Grenoble: La Pensee Sauvage.

DOUADY, Regine (1984). Relación enseñanza-aprendizaje, Dialéctica Instrumento Objeto, Juego de marcos. *Revista de Didáctica*, 3.

DUIT, R. (1994). The Constructivist view in Science Education — What it has to offer and what should not be expected from it Proceedings International Conference of Science and d Mathematics Education for the XXI ST: Century Towards Innovatory Approaches. Concepción, Chile.

GÁLVEZ PÉREZ, Gracia (1994). La didáctica de la matemática. En SAIZ-PARRA (Com.) *Didáctica de la Matemática.* Ed. Paidós.

GARCÍA MORENTE, M. (1938). *Lecciones preliminares de filosofía.* Buenos Aires: Losada.

GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (1991). Historia de la matemática: Integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 9 (3), 281-289.

LOCKE, J. (1970). *Ensayo sobre el entendimiento humano.* Argentina: Aguilar.

MATTHEWS, MR. (1994). Vino viejo en botellas nuevas: Un problema con la epistemología constructivista. *Enseñanza de las ciencias*, 12 (1), 79-88.

VON GLASERSFELD, E. (1987). *Constructivism as a scientific method*. Pergamon Press.

Resumen

Ante la evidencia de un cambio profundo en la metodología de enseñanza de la matemática en la escuela, se hace necesario reflexionar y discutir varios aspectos relativos a este cambio que no están del todo claros o explícitos.

Se tratarán de desvelar algunos supuestos implícitos en los discursos alrededor de la enseñanza de la matemática para tratar de arribar a unas primeras conclusiones que orienten la tarea docente.

Palabras clave: Didáctica de la matemática; epistemología constructivista; Relaciones enseñanza-investigación; Ingeniería didáctica.

Summary

Considering the profound changes produced in the Methodology of Mathematics Teaching it is necessary to think over and discuss on several aspects related to these changes which are not very clear or distinctly expressed.

In this paper we aim at clarifyng some hypotheses involved in discourses about Mathematics Teaching in order to get to some conclusions that guide the theaching task.

Passwords: Mathematics Didactics; Constructivism Epistemology; Teaching — Research Relationships; Didactic Engineering.

María Cecilia Papini, María Rita Otero, Inés Elichiribehety

UNC. Facultad de Ciencias Exactas. Departamento de Formación Docente. Pinto 399. 7000. Tandil Buenos Aires. ARGENTINA

Del análisis de las Matemáticas de la L.O.G.S.E. en la Educación Secundaria a otras reflexiones didácticas

Javier Peralta

1. Introducción

EL presente artículo tiene su punto de partida en un análisis sobre el tratamiento que se da en la L.O.G.S.E. a las matemáticas correspondientes a la Educación Secundaria. Para ello se estudian, en primer lugar, la metodología recomendada por el M.E.C. y, posteriormente, los contenidos de matemáticas en ese nivel educativo.

A raíz precisamente del examen anterior, se exponen consideraciones didácticas más generales sobre la enseñanza de las matemáticas, con la intención de mover al lector a la reflexión y al debate, de los que acaso saque consecuencias para su ejercicio docente.

Concluimos con una valoración final —que obviamente puede no ser compartida—, en la que mostramos nuestra opinión sobre si las matemáticas que aparecen en ese diseño educativo son o no las adecuadas para un estudiante que vaya a acceder posteriormente a la Universidad.

2. Reflexiones metodológicas

Comenzaremos analizando la metodología sugerida en la L.O.G.S.E. para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria, tal como hemos anunciado; más tarde nos ocuparemos de los contenidos.

Un aprendizaje más atractivo

Un primer aspecto que se desprende de la metodología aconsejada por el M.E.C. es que se utilicen métodos de enseñanza que hagan más atractivo el aprendizaje de las matemáticas.

Respecto a ello hay que decir que evidentemente es muy deseable hacer las matemáticas más asequibles pero, como es lógico, ello no puede depender sólo de la actitud del profesor y de la metodología que se emplee, sino también de la estructura interna de la materia. Conviene afirmar, por tanto, que aun siendo muy positivas las recomendaciones que se hacen respecto a procedimientos, estrategias y actitudes, no hay que olvidar tampoco que, se enseñen como se enseñen, las matemáticas habrán de mantener ciertos rasgos que le son propios, y no está claro ni mucho menos que se hagan patentes en el enfoque que ofrece el M.E.C. Nos referimos a los siguientes, inspirados en Servais (1980):

a) Su carácter de disciplina.

Posiblemente la matemática sea la asignatura que posee más el carácter de disciplina, y ello como resultado de un conjunto de propiedades que tiene en mayor grado que otras materias. Así se desprende de su organización hipotético-deductiva a partir de una axiomática, de la que se deducen a su vez una estructuración esquemática y sintética de sus contenidos y unos métodos de razonamiento formales que confieren a las matemáticas una solidez y rigidez muy acusadas.

b) Su condición jerarquizada y su significación global.

Se puede decir que las matemáticas son una asignatura jerarquizada, en el sentido de que para comprender un concepto es frecuente que se necesite haber estudiado otros anteriores. Ello no sucede en otras materias, donde es posible conocer una parte ignorando otras; en matemáticas, sin embargo, todo se relaciona.

Este carácter acumulativo y global exige para su comprensión un esfuerzo de memoria sintética y, aunque esa conexión entre distintas partes es sin duda una ayuda que facilita la comprensión y visión conjunta de diferentes nociones, se precisa haber alcanzado un cierto nivel para apreciar esa interrelación.

c) Su exigencia.

Las matemáticas suelen ser consideradas como una de las asignaturas con mayor nivel de exigencia, aunque es habitual asimismo reconocer el carácter de objetividad de sus pruebas.

Entre las causas de esa exigencia hay que considerar en primer lugar que en otras materias no sucede como en matemáticas, donde un error casi siempre se extiende, y un fallo en un cálculo concreto puede afectar al desarrollo posterior. En segundo lugar, en matemáticas hay que «ir al grano», y no existe posibilidad de responder a las preguntas que se formulan con vaguedades y frases huecas, sino que se valoran especialmente la claridad y la concisión. Por último, es preciso haber hecho multitud de problemas para ser capaz de resolver otros que difieran de los ya realizados, y aunque el planteamiento suele ser el aspecto más difícil de los mismos, es frecuente subestimar ese valor de creación e imaginación, al que habitualmente sólo se llega tras un trabajo duro y tenaz de ejercitación.

d) Su nivel de abstracción.

Para ser un buen artista, por ejemplo, es fundamental la personalidad subjetiva del sujeto; en cambio, en las ciencias positivas, y muy especialmente en matemáticas, se exige la renuncia voluntaria de sus practicantes a toda subjetividad; por ello, para algunos, la matemática es la materia más alienante de todas.

En matemáticas se procede por abstracción y esquematización sucesivas. Como señala Puig Adam (1960): «Por abstracciones sucesivas edificamos categorías mentales en las que se estratifican lo concreto y lo abstracto en orden de abstracción creciente y concreción decreciente,...». Por depuraciones progresivas, las nociones se van refinando y vaciando de contenido semántico para acceder a un estadio exclusivamente lógico. Y ese razonamiento lógico, totalmente en el mundo de las ideas, aisla a las matemáticas del mundo y de los demás, y coloca a las matemáticas alejadas de la realidad concreta.

Esas afirmaciones, válidas para el estudio de las matemáticas superiores, constituyen sin embargo un auténtico despropósito si se refieren a su enseñanza en la Educación Secundaria. Por ello, tal como sugiere la L.O.G.S.E., habrá que tratar de aproximar las matemáticas a la realidad. De ello hablaremos a continuación.

El sentido de aplicación

Un segundo elemento —digno de elogio, por cierto— que establece la L.O.G.S.E. es la recomendación metodológica de propiciar la aplicación de las matemáticas a la vida real.

En relación con este aspecto, indudablemente positivo, acaso convenga recordar que sus dos ramas iniciales: aritmética y geometría, nacieron para resolver problemas de la vida ordinaria; la primera por la necesidad del empleo de los números para contar y efectuar transacciones comerciales, y la segunda para realizar mediciones. Y de esta manera fueron desarrollándose ambas y la matemática en general.

No obstante, a pesar de ello, siempre ha existido el matemático caracterizado por el desprecio de lo experimental y de las aplicaciones de las matemáticas, cuya referencia aparece en numerosos pasajes de la literatura —como por ejemplo, en «Los viajes de Gulliver», donde se describe un país cuyos habitantes son matemáticos que desprecian lo práctico y, en consecuencia, sus casas están mal construidas, sus trajes mal cortados, etc.—, y queda reflejado en frases como las siguientes:

«La matemática sólo sirve para el desarrollo del gusto de los razonamientos sutiles. Los más eminentes matemáticos no saben con frecuencia conducirse en la vida y se desorientan frente a las menores dificultades» (Le Bon). «La matemática es un estudio que no obliga a la observación, a la inducción, a la causalidad» (Huxley). «El matemático tiene horror a lo real, abomina del caso particular; la abstracción y la generalización son los ídolos a los que sacrifica el buen sentido. Cuando ya no queda nada de un fenómeno es cuando razona a sus anchas; el vacío es su elemento; la forma, su dios» (Bouasse).

Estas opiniones, algo exageradas sin duda, encuentran sin embargo una cierta justificación si se examinan las distintas fases que pueden distinguirse en un modelo matemático, y se analiza a cuál o cuáles de ellas se ha dirigido la enseñanza tradicional de las matemáticas.

Como es sabido, en un modelo matemático se pueden considerar tres fases: la abstracción, mediante la cual se procede a definir los conceptos partiendo de la realidad o de ideas intuitivas; el razonamiento lógico-matemático, con el que se construye la correspondiente teoría, estableciéndose los teoremas y proposiciones; y la concreción o proyección de estos resultados al campo real para obtener aplicaciones. Sin embargo, la enseñanza de la matemática se ha reducido casi siempre a la segunda, esto es, al razonamiento lógico, desprovisto de toda significación real; y como consecuencia, en la enseñanza se ha producido un divorcio entre las matemáticas y la realidad. Las matemáticas se han presentado entonces imbuidas en un exceso de formalismo, pero sin ninguna utilidad, no teniendo en consideración que se desarrollaron inicialmente, y así transcurrieron a lo largo de los siglos, por dos motivos principales: para satisfacer necesidades sociales o de la vida cotidiana, o como ayuda de otras ciencias, fundamentalmente la física.

Permítaseme la licencia de contar una vieja historia que caricaturiza esa actitud despectiva de algunos matemáticos puros hacia la aplicabilidad de las matemáticas: «Un hombre, único tripulante de un globo se hallaba perdido y desesperado, y optó por lanzar lastre para tomar tierra de inmediato, encontrándose en un paraje dominado por una intensa niebla. Al dar con uno de los sacos de lastre en la cabeza de un pensador que estaba sentado sobre unas piedras, el modesto y desconcertado aeronauta se apresuró a pedir disculpas, y aprovechó la ocasión para preguntar al solitario pensador si podía ayudarle a saber dónde estaba. Éste le observó un instante, agachó la cabeza y volviendo a levantarla le dijo: está en un globo sobre mi vertical. El viajero preguntó entonces: ¿es usted matemático?; sí —dijo el pensador gratamente sorprendido—, ¿cómo lo ha descubierto? Nuestro desanimado aventurero añadió: me ha observado, ha reflexionado sobre ello y me ha dado una respuesta lógica, absolutamente exacta y perfectamente inútil».

La auténtica educación matemática, no obstante, debe de fomentar el sentido de aplicación, en su doble vertiente: abstracción y concreción, como asimismo el desarrollo de la intuición.

El remedio para propiciar la abstracción ha de comenzar en su propio origen: en la etapa de formación de los conceptos. Para ello, antes de iniciar el proceso lógico, es preciso que el estudiante disponga de un buen número de hechos concretos: observaciones, experiencias y conjeturas que sean el germen de las nociones abstractas. La facultad de abstracción debe de comenzar por lo concreto, pues si abstraer es prescindir de algo para quedarse con lo fundamental, se ha de partir porque exista ese algo de que prescindir; sin embargo, en la enseñanza habitual de la matemática se dan ya las abstracciones hechas, y no se propicia el que puedan ser formuladas por el alumno.

Tampoco ha de limitarse el proceso de aprendizaje a resolver problemas de «aplicación» después de explicaciones teóricas, sino que debe fomentar la concreción de los resultados, es decir, la proyección a la realidad de las consecuencias a las que se ha llegado por razonamientos abstractos.

Y respecto de la intuición, digamos que, dejando de lado todas las excelencias de la lógica, es indudable que ésta no es suficiente para el desarrollo de la ciencia; y asimismo la enseñanza de las matemáticas no debe reducirse a potenciar el razonamiento lógico, sino que es preciso también estimular el uso de la intuición. En la evolución de la matemática se observa que el verdadero faro que ilumina y descubre nuevos caminos es la intuición; la lógica viene casi siempre después, limitándose a demostrar los descubrimientos debidos a aquélla; o dicho en palabras de Poincaré: «es la intuición la que descubre, y la lógica la que demuestra».

La historia de la matemática

El tercer aspecto metodológico que resaltamos es la sugerencia que se hace a la utilización de la historia de la matemática.

Ello nos parece muy positivo, ya que en la enseñanza tradicional de la matemática, los conceptos y los descubrimientos matemáticos suelen presentarse totalmente separados del proceso histórico que dio lugar a su creación. Su exposición se realiza habitualmente fuera del contexto que motivó su génesis, produciéndose un total alejamiento entre la evolución de los conocimientos matemáticos y su transmisión. Sin embargo, el conocimiento de la historia de la matemática y su uso en la enseñanza puede acercar ambos procesos y jugar un importante papel para motivar a nuestros alumnos, tal como recomienda la L.O.G.S.E.

Pongamos un ejemplo tomado de Bouvier et al. (1986), que recoge lo que aparece en un libro de texto francés la primera vez que el alumno tiene contacto con el teorema de Tales: «Enunciaremos el teorema siguiente, conocido con el nombre de teorema de Tales. Teorema: Sean A y B dos puntos distintos de una recta r y M otro punto cualquiera de la misma; sean A' , B' y M' las imágenes de los puntos A, B, M por una proyección no constante P de la recta r sobre una recta r'. Entonces el punto M' tiene la misma abscisa en la referencia (A', B') que el punto M en la referencia (A, B)». Y todo el capítulo sobre el teorema de Tales tiene ese mismo tono.

Este ejemplo, aunque algo extremo, no puede decirse sin embargo que constituya exactamente una excepción. ¿Qué atractivo puede tener el enunciado anterior u otros similares para un alumno? ¿Dónde aparece la problemática que originó el teorema? Aunque en algunos textos hay ciertas referencias históricas a la figura de Tales, hasta hace poco raramente se hacía mención al problema que dio lugar al teorema.

Como es sabido, sin embargo, el problema de Tales (tratar de medir la altura de las pirámides de Egipto por medio de su sombra, lo que Tales realizó en el momento en que la sombra de un palo coincidía con su altura) es perfectamente inteligible para los alumnos de ese nivel. Tengamos en cuenta que, en realidad, lo que Tales descubrió es la posibilidad de la reducción, la noción de modelo: como la pirámide es inaccesible, inventó la escala. Partiendo por tanto del problema de Tales (la medida de la altura de una pirámide) se puede crear una situación que movilice el interés y la reflexión de los alumnos.

En éste y otros ejemplos que podrían citarse se observa que la historia de la matemática constituye un instrumento de apoyo excelente para crear situaciones didácticas. Pero no sólo eso; en la evolución de la matemática y en el estudio de su historia, se observan ciertos comportamientos o situaciones que pueden ser de interés para su enseñanza, ya que de ellos caben deducirse principios didácticos o, simplemente, conclusiones que iluminen nuestra acción docente. Por ejemplo, la conveniencia de ir de lo particular a lo general, como se deduce del examen de textos antiguos y de contemplar cuál ha sido la forma habitual de proceder en la génesis de numerosos conceptos; la intención de «humanizar» la enseñanza de las matemáticas, resaltando las dificultades, anécdotas y ciertos rasgos personales de algunas figuras de la matemática o constatando la cooperación entre distintos matemáticos; la ayuda para reencontrar el sentido de lo que enseña —en contra del fenómeno de «despersonalización» y «deshistorización» del saber (lo que los pedagogos llaman «transposición didáctica»)— y para la comprensión de ciertos errores de los alumnos; etc.

(Para un desarrollo más amplio de los anteriores argumentos puede consultarse el libro (Peralta 1995)).

Interdisciplinariedad

Otra recomendación metodológica que se hace en la L.O.G.S:E. es la de tratar de presentar relaciones de las matemáticas con otras áreas del currículo, es decir, resaltar la interdisciplinariedad.

Hay que decir de entrada que ello nos parece muy conveniente ya que, efectivamente, ha sido notoria hasta ahora la absoluta desconexión entre distintas asignaturas, lo que impide que, al final de la Enseñanza Secundaria, el alumno pueda percibir una cierta visión general del saber científico y humanístico (aunque obligadamente elemental), y se encuentre en condiciones de relacionar entre sí hechos diversos o ideas que fueron introducidos desde distintos puntos de vista.

Admitamos, sin embargo, la gran dificultad que entraña abordar teorías científicas o hechos históricos desde diferentes ópticas. Las causas son varias y, en nuestra opinión, se deben no sólo a la amplitud de los programas —lo que exige olvidarse de los «aspectos accesorios» para poder llevar el ritmo adecuado (aun cuando dichos aspectos serían un buen campo en el que los alumnos podrían desarrollar trabajos más creativos)—, sino también a una preocupación, posiblemente encomiable, de no hablar más que de aquello que se conoce mejor.

Por todo lo anterior, como ya hemos dicho, nos parece positivo que en la L.O.G.S.E. se aconseje esa interdisciplinariedad, recomendación que por otro lado viene dada desde antiguo. Lo que hay que hacer es señalar con más precisión las posibles relaciones de las matemáticas con otras áreas de conocimiento. Citemos algunas:

En primer lugar, se deben resaltar las conexiones más evidentes de las matemáticas con las ciencias de la naturaleza y la tecnología (medidas de magnitudes, pH, vectores, derivadas, ...), y presentar los conceptos con un mismo lenguaje, lo que, como es sabido, no sucede siempre (por ejemplo, los vectores en matemáticas y en física). En segundo lugar, y debido a que las leyes de la naturaleza suelen expresarse en lenguaje matemático, es posible ofrecer multitud de ejemplos de funciones que aparecen en las ciencias. Así, el movimiento uniforme o la función que expresa la longitud de un cuerpo en términos del coeficiente de dilatación lineal y temperatura, como ejemplos de funciones lineales; la ecuación de la trayectoria de un proyectil, de función cuadrática; la ley de Boyle-Mariotte como ejemplo de función de proporcionalidad inversa; el período de un péndulo, de función irracional; la desintegración radiactiva, la ley de enfriamiento de Newton o la variación de la presión atmosférica con la altura, como ejemplos de funciones exponenciales; etc.

Pero no sólo existen relaciones con las ciencias, sino que las matemáticas están asimismo presentes en otras áreas del conocimiento. Por ejemplo, en artes plásticas: geometría de figuras, proporcionalidades, ...; en ciencias sociales: tasas, índices, gráficos, mapas y planos a escala, crecimiento demográfico, curva logística, ...; en psicología: ley de estímulo-sensación, ...; en economía: ley de la oferta y la demanda, interés, ...; etc. Y por supuesto, hay que mencionar además como cuestión fundamental el importante apoyo que proporciona la estadística para el estudio de prácticamente todas las áreas del saber.

En otro orden de ideas, y posiblemente como consecuencia de una enseñanza tradicional de la matemática, que presenta a ésta como una materia cerrada y fría y sin ninguna relación, a pesar de las muchas existentes, con otras parcelas del conocimiento —algunas de las cuales acaban de ser puestas de manifiesto—, ni con la evolución cultural de la humanidad, nace una concepción de las matemáticas muy alejada de la cultura.

En relación con ello hemos de decir que, debido seguramente a nuestra tradición cultural en las artes y la literatura, pero no en las ciencias, no suele existir pudor en admitir una falta de conocimiento u olvido de las nociones matemáticas más elementales, incluso tratándose de personas cultas. A ningún profesor, por ejemplo, se le ocurriría decir en la sala de reuniones de su centro: «Tú que eres de Geografía, ¿dónde se encuentra la República Dominicana?», o «Tú que eres de Lengua, corrígeme esta carta», o incluso: «Fulano se ha roto la tibia; tú que eres de Ciencias, ¿dónde está la tibia?». Sin embargo, no hay recato en requerir de un profesor de matemáticas que calcule, por ejemplo, un tanto por ciento o una media aritmética (a pesar de que estas peticiones se hacen la mayoría de las veces por comodidad o porque se supone que el matemático lo efectuará más rápidamente, hemos comprobado en alguna ocasión que no era esa la causa, sino que quien lo solicitaba, efectivamente no lo sabía hacer, y que su manera de razonar en matemáticas se asemejaba a la de un niño de corta edad).

Parece deducirse de todo lo anterior que las matemáticas no fueran consideradas como uno de los elementos de la evolución cultural de la humanidad y, en consecuencia, que su conocimiento no tendría porqué formar parte del bagaje de una persona culta. Nuestra opinión, sin embargo, está en total desacuerdo con ello, y trataremos de justificarla en las siguientes líneas.

En primer lugar, parece obvio afirmar que muchos de los grandes pensadores de la humanidad se han dedicado asimismo a la matemática, razón por la que se pueden encontrar a lo largo de la historia numerosos filósofos que a su vez han sido matemáticos, y viceversa, y han dejado patente la importancia de la matemática en la construcción del pensamiento y en la evolución de las ideas (baste como botón de muestra el «Prohibido entrar a quien no sepa geometría», colocado a la entrada de la Academia de Platón, que constituye junto al Liceo de Aristóteles las dos escuelas filosóficas principales de Atenas en el siglo IV a. C.).

También está la consideración de las matemáticas como arte, que se hace por ejemplo en el «Ars Magna» de Cardano (Etayo et al. 1995), donde arte tiene la acepción de conjunto de reglas y conocimientos relativos a una materia («de regulis algebraicis» en el Ars Magna). De igual modo, la aritmética y la geometría aparecen incluidas dentro de las denominadas «artes liberales» (la gramática, la retórica y la lógica o la dialéctica, que forman el «trivium» de Zenón; y la aritmética, la geometría, la música y la astronomía, que constituyen el «quadrivium» de Arquitas), que figuran representadas en distintos lugares; por ejemplo, en el Museo de Arte Románico de Barcelona, donde la aritmética y la geometría vienen acompañadas, respectivamente, por Euclides y Pitágoras; o en la Biblioteca del Monasterio de El Escorial, que vienen encarnadas, entre otros, por Arquitas y Boecio, la primera de ellas, y por Arquímedes y Aristarco la segunda.

Y podrían ponerse muchos otros ejemplos de la presencia de las matemáticas en las más diversas expresiones culturales y artísticas. Baste con pensar en la «divina proporción» de Luca Pacioli («sección áurea» de Leonardo da Vinci o «sección divina» de Kepler), nacida en relación con el descubrimiento de los números irracionales, y que es considerada desde el punto de vista estético como la proporción más bella, razón por la que aparece por doquier a lo largo de toda la historia del arte: capiteles corintios, fachada del Partenón de la Acrópolis de Atenas, numerosos templos griegos, catedrales góticas, palacios renacentistas, e incluso en arquitectura moderna, y que asimismo ha sido utilizada en diferentes figuras ornamentales (espiral de Durero, cruz de Lorena, ...). O su relación con la música, conocida ya desde los pitagóricos —que vincularon las propiedades y relaciones de la armonía musical con la armonía reflejada en los números, estableciéndose de ese modo el sistema pitagórico de afinación musical—, y admitida desde entonces de manera general, y que viene reflejada en frases como la siguiente (Etayo et al. 1995): «La música es un ejercicio de aritmética secreta» (Leibniz), «La música es un arte terriblemente euclidiano» (Alejo Carpenter), etc. O, para finalizar, su interrelación en determinados momentos con la pintura, como se pone de manifiesto con el nacimiento de la perspectiva en el Renacimiento (Leonardo da Vinci, Durero, Piero della Francesca, ...), o en el paralelismo que se observa en la segunda mitad del siglo XIX (Dunham 1992) entre una cierta liberalización del arte de la realidad visual (Cézanne, Gaugin, van Gogh, ...) y el descubrimiento de las geometrías no euclídeas independientes del «mundo real» (Beltrami, Gauss, Bolyai, Lobachewski, ...).

Metodología heurística

Otro de los aspectos positivos que hemos resaltado de la enseñanza de las matemáticas en la L.O.G.S.E., es que se propicia una metodología heurística que destaca la importancia de la actividad del alumno en el proceso de aprendizaje, en contra de otra excesivamente expositiva y dogmática. Se sugiere por tanto la conveniencia de una metodología no sólo activa, sino que esa actividad se oriente a la elaboración de los conceptos y sus propiedades, de modo que el alumno sienta alegría al descubrir la verdad por su propia inventiva, a partir de situaciones didácticas hábilmente creadas ante él por el profesor para despertar el interés.

Nuestra valoración sobre este tipo de metodología es sumamente positiva, siempre que no se practique con carácter general, ya que también conlleva, a nuestro juicio, algunos inconvenientes como los siguientes:

a) Lentitud del procedimiento.

Es consecuencia de que en este aprendizaje por descubrimiento las nociones no se dan hechas de antemano y, por tanto, se requieren una etapa de tanteo anterior a la captación del significado, y una fase posterior de comprensión e interiorización de la información descubierta (fase, por otro lado, más dulcificada que en el caso de la enseñanza tradicional, por haber participado en la elaboración de los conceptos).

b) Dificultad de su aplicación en clases numerosas o heterogéneas.

En efecto, pues el plantear preguntas y cuestiones con las que los alumnos deben ir trabajando, tiene el inconveniente que haya alumnos —o grupos de alumnos, si el trabajo se plantea en grupos—, que normalmente se adelanten a los demás en sus respuestas, con la consiguiente pasividad de éstos, lo que puede inducirles con el tiempo a una pérdida de interés.

c) Falta de trascendencia de los conceptos.

Las situaciones iniciales en este método se toman a veces de la vida real, y a partir de ellas se procura que el alumno construya conceptos, conjeture hechos u obtenga propiedades. Pero en todo ello hay un peligro: que una vez que se ha llegado a donde se deseaba, no se sepa extraer del ejemplo el concepto o resultado en cuestión para captar lo fundamental del mismo en un proceso de abstracción, y poder aplicarlo a otras situaciones distintas; es decir, que no se trascienda del ejemplo concreto al caso general.

Como ejemplo de ello podemos tomar el siguiente (Etayo 1972) en el que se tratan de establecer las nociones de clase de equivalencia y de conjunto cociente, una vez que se han estudiado las relaciones de equivalencia. Resumidamente la situación es la siguiente:

Se le pregunta a un alumno qué autobús toma para ir a un determinado lugar: supongamos que la respuesta es el 12. Se le contesta entonces que el 12 no es un autobús, sino una línea de autobuses, que resulta de definir entre todos los autobuses municipales de la ciudad la relación binaria que establece que dos autobuses están relacionados si hacen el mismo recorrido. Esta relación es obviamente de equivalencia, lo que permite clasificar el conjunto en clases de equivalencia; cada clase está formada por todos los autobuses relacionados entre sí; esto es, que hacen el mismo itinerario. A cada clase de equivalencia se le denomina línea de autobuses, y al conjunto cuyos elementos son las clases, es decir, las líneas de autobuses, conjunto cociente.

A pesar de la bondad de este ejemplo, que permite introducir las definiciones de clase de equivalencia y de conjunto cociente en un conjunto cualquiera con una relación de equivalencia arbitraria definida en él, la experiencia nos confirma que, si con posterioridad se preguntan los conceptos de clase de equivalencia y de conjunto cociente, hay siempre una cantidad apreciable de alumnos que los refieren al caso particular de los autobuses, sin ser capaces de dar el salto a una situación general. Para ello será preciso plantear además otros ejemplos en los que también estén involucradas esas nociones, antes de iniciar el proceso de abstracción en pos de la definición general.

De la necesidad de creación de esa variedad de situaciones motivadoras, de la dificultad que conlleva el planteamiento de una clase de forma flexible y activa —con el consiguiente problema de ruido y quizás alboroto—, y de la exigencia de una mayor atención al estudiante, se deduce además que la práctica del método heurístico supone un enorme trabajo para el profesor.

Como consecuencia de todo lo dicho anteriormente, concluimos que, enseñanza heurística, sí, pero en pequeñas dosis: propugnarla con carácter general nos parece una utopía.

Concepción formal de la matemática

Entre las características metodológicas para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria que se observan en la L.O.G.S.E., vamos a destacar ahora una que va dirigida al Bachillerato. Nos referimos a la indicación que se hace de que en el Bachillerato se empiecen ya a estudiar las matemáticas con un tratamiento relativamente formal.

Evidentemente eso nos parece bien, aunque la recomendación sea algo tardía, ya que, ¿con qué fundamentos teóricos se han estado construyendo entonces las matemáticas anteriores?, ¿cómo es posible que no se reconozca la conveniencia de presentar hasta los dieciséis años una cierta organización formal? Sería una pena que, como consecuencia de ello, el alumno no comenzara a percibir hasta esta edad la estructuración lógica de la matemática, tan conveniente además para la comprensión del método científico, y podría incluso decirse que para el razonamiento en general.

Es sabido, sin embargo, según señala Piaget al dividir en cuatro etapas el desarrollo intelectual del niño: sensomotriz, preoperativa, etapa de las operaciones concretas y etapa de las operaciones formales, que esta última se alcanza aproximadamente a los catorce años, que es cuando la mente empieza ya a ser capaz de realizar razonamientos matemáticos formales. ¿Porqué entonces ese retraso en fomentar ese tipo de razonamiento?

Nuestra opinión es que, como consecuencia de ello, el alumno llegará al nuevo 1° de Bachillerato con una actitud mental hacia las matemáticas —que tememos incluso que pudiera ser más general—, similar a como ahora acude a 1° de B.U.P.: pidiendo que se hagan los cálculos y los razonamientos con números y no con letras, confundiendo la hipótesis con la tesis de un teorema, y empleando argumentos del tipo: «como todo número que acaba en 2 es par, todo número que no acabe en 2 será impar».

¿A qué edad van a empezar los alumnos a razonar correctamente, si a este planteamiento de las matemáticas se añade además la marginación de la Filosofía? Parece como que el hecho de extender la escolarización obligatoria hasta los 16 años debiera implicar que, como entonces habrá muchos alumnos, casi todos ellos serán tontos.

3. Los contenidos. Valoración final

Hablemos ya de los contenidos de matemáticas en la Educación Secundaria; comenzaremos con los relativos a la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Digamos en primer lugar que nos merece una consideración muy positiva el que figure con un peso importante la geometría elemental —que prácticamente había desaparecido del B.U.P., limitándose a su estudio en coordenadas, vía el álgebra lineal—, así como que se propicie el uso de la calculadora, que se aborde el estudio de la resolución de problemas, y que esté presente la estadística en sus programas (que esperemos que efectivamente se estudie, y no como sucedía hasta ahora, que a pesar de figurar en 1° de B.U.P. —además de en 3° de B.U.P. y en C.O.U.—, casi nunca daba tiempo a que se viese). Acto seguido hay sin embargo que dejar constancia que el nivel de los contenidos es casi siempre excesivamente elemental, como consecuencia del menor número de horas semanales dedicadas a las matemáticas, y del proyecto académico en sí, poco ambicioso en cuanto a su fundamentación teórica.

Por ello, ciertos capítulos esenciales de la matemática quedan sin abordarse o, en el mejor de los casos, son tratados con muy escasa profundidad. Sin duda, el más significativo es el relativo al lenguaje del álgebra y a sus aspectos operativos más simples, como la resolución de ecuaciones y sistemas, sin olvidar el estudio de los polinomios y de las fracciones algebraicas que, además de su innegable interés operativo, son esenciales para poder acometer, por ejemplo, el análisis, aunque sea elemental, de las gráficas de funciones (a no ser que dicho análisis sea absolutamente inconsistente y esté desprovisto de todo fundamento).

Hay por supuesto otras partes importantes de la matemática que echamos en falta pero, para no alargarnos, solamente mencionaremos la ausencia en la Enseñanza Secundaria Obligatoria de un estudio elemental del cálculo infinitesimal, pieza indispensable para interpretar la interdependencia de las magnitudes físicas, para lo que no bastan el álgebra y la geometría (como escribía Klein, «... las bases sobre las cuales reposa la explicación científica de la naturaleza son inteligibles sólo a aquellos que han aprendido, por lo menos, los elementos del cálculo»).

Aun tratando de entender que los contenidos matemáticos en la E.S.O. sean de un nivel tan elemental y con tan graves omisiones, con el objeto de poder garantizar su carácter de obligatoriedad y no diversidad mediante una igualación a la baja, lo que resulta absolutamente desestimable es que se piense que, en tan sólo dos cursos de bachillerato, se podrá recuperar lo que no se ha estudiado para ponerse en disposición de ingresar en carreras científicas o técnicas.

¿O es que es posible que un alumno que haya visto por vez primera las ecuaciones y los sistemas de dos incógnitas en la modalidad B del 4° curso —algo que hasta ahora se ha estudiado en 8° de

E.G.B.—, que haya trabajado tan poco con expresiones algebraicas, y que prácticamente desconozca los polinomios, adquiera una fluidez suficiente en la resolución de ecuaciones y en el manejo de las técnicas algebraicas elementales? ¿O que sea capaz de asimilar el concepto de número real casi de repente, noción que a nuestro juicio precisa de un lento aprendizaje que vaya madurándose a lo largo de varios años? O, por no extendernos en más detalles, ¿que pueda adquirir algunos conceptos formales del cálculo infinitesimal y trabajar con ellos prácticamente sólo en el nuevo curso de 2º de bachillerato, cuando debido a que su aprendizaje requiere, sin lugar a dudas, de una sedimentación y asimilación gradual, antes se iniciaba en 2º de B.U.P.?

Hay además en todo ello un agravante: una enseñanza de las matemáticas planteada fundamentalmente sobre la manipulación en ejemplos y aplicaciones triviales, con la consiguiente reducción al mínimo de la creación de estructuras mentales inherentes al razonamiento deductivo —cuya utilidad y alcance trasciende, por cierto, al ámbito de las matemáticas—, es una enseñanza de poca altura, e inadecuada para futuros científicos. En la concepción de esta Enseñanza Secundaria no creo que pueda hablarse por tanto, como se ha dicho, «de una preeminencia de las Ciencias sobre las Letras», sino de una cierta exaltación de la trivialidad y de la inconsistencia sobre el rigor y la auténtica cultura, al menos científica (y nos tememos que igual suceda con las humanidades, las letras y las artes).

Porque las matemáticas que necesitan, por ejemplo, los futuros físicos, matemáticos o ingenieros antes de entrar en la universidad, son en buena parte aburridas, y así hay que decirlo sin ambages, y precisan para su aprendizaje de un estudio tenaz y perseverante, pues el nivel matemático y de exigencia requerido para cursar dichas especialidades es necesariamente elevado.

Otra opinión distinta es la referente a los alumnos de los restantes bachilleratos, para los que el planteamiento actual de las matemáticas esté hecho probablemente con un carácter demasiado academicista, y sin tener en cuenta las aplicaciones que les puedan ser de utilidad; por ello pensamos que posiblemente sea positivo el enfoque que se da a las matemáticas en los nuevos bachilleratos de Artes, Humanidades y Ciencias Sociales. Pero incluso en estos casos, mantenemos una prudente reserva, ya que para poder aplicar las matemáticas es preciso que su conocimiento esté fundamentado sobre ciertas bases, mientras que en el proyecto que propone el Ministerio se habrán de hacer verdaderos equilibrios (ignoramos si con un balance finalmente positivo) para poder usar las matemáticas sin un determinado sustento teórico. A lo mejor también sucede que esa utilización de las matemáticas quede asimismo reducida a trivialidades desprovistas de un auténtico interés.

Como resumen de todo lo expuesto, nuestra opinión es que el nuevo bachillerato, en lo que concierne a la formación matemática de los alumnos, nos parece insuficiente, al menos para aquellos que piensen estudiar posteriormente ciencias o ingeniería, y que por tanto debería ampliarse. Ahora bien, ante el grave trastorno que supondría retrasar un año más la entrada en la Universidad, parece que la solución pasaría por que el Bachillerato comenzara antes; esto es, que al menos en 4º de E.S.O. hubiera una enseñanza diversificada —lo que no implicaría el dejar de ser obligatoria—, con opciones dirigidas a los diferentes bachilleratos, y quizás otra más generalista (orientada a los alumnos que pensaran abandonar la escuela a los dieciséis años o se encaminaran a un módulo de Formación Profesional). En las opciones que se correspondieran con los bachilleratos de las modalidades de Ciencias y de Tecnología, está claro que las matemáticas deberían tener una mayor presencia y profundidad, tratando de cubrir las carencias expuestas con anterioridad.

REFERENCIAS

BOUVIER, A. et al. (1986). *Didactique des Mathématiques*. París: Cedic/Nathan.

DUNHAM, W. (1992). *Viaje a través de los genios.* Madrid: Pirámide.

ETAYO, J. J. (1972). *Conceptos y métodos de la Matemática Moderna*. Barcelona: Vicens-Vives.

ETAYO, J. J. et al. (1995). *Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria.* Madrid: Rialp.

PERALTA, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*. Madrid: Huerga y Fierro.

PUIG ADAM, P. (1960). *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

SERVAIS, W. (1980). Humanizar la enseñanza de la Matemática. *Revista de Bachillerato*, Suplemento al nº 13, M.E.C., 3-22.

Resumen

En este artículo se hace un estudio sobre el currículo de matemáticas en la Educación Secundaria que establece la L.O.G.S.E., mediante un análisis de la metodología que se recomienda para su enseñanza, y de sus contenidos. Dicho análisis se extiende a otras reflexiones más generales sobre la enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave: L.O.G.S.E., metodología, contenidos.

Abstract

In this paper a study about the mathematics study programme in Secondary Education according to L.O.G.S.E. is made, by analysing its contents and teaching methods. Such analysis extend over other more general reflections about the mathematics teaching.

Key words: L.O.G.S.E. (Educational System General Order Law), methodology, contents.

Javier Peralta
Dpto. de Matemáticas
E.U. de Formación del Profesorado «Santa María»
Universidad Autónoma de Madrid
Ciudad Universitaria de Cantoblanco
28049 Madrid.

Apuntes de historia de la matemática con posible interés para la práctica educativa

El teorema de Ptolomeo. Algunas contribuciones debidas a matemáticos españoles

Ricardo Moreno Castillo

Introducción

EL aislamiento científico en el que vivió España hasta muy entrado el siglo hizo que la mayor parte de la investigación matemática consistiera, bien en trabajar campos muy periféricos donde la erudición previa necesaria es mínima (como la geometría del triángulo), bien en darle vueltas a los teoremas clásicos y encontrar nuevas demostraciones.

Revolviendo en la hemeroteca antigua de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense y en los fondos de la Real Academia de Ciencias, encontré un número sorprendente de trabajos dedicados a estudiar las propiedades de los cuadriláteros inscriptibles en una circunferencia. La mayoría de ellos tratan sobre el teorema de Ptolomeo, unos dando demostraciones nuevas, otros deduciendo de él algunas fórmulas de geometría elemental. El presente artículo es un resumen de los más significativos, con unos breves datos biográficos de los autores.

Dada la escasez de material bibliográfico que nuestros matemáticos tenían a su alcance, no es imposible que algún resultado publicado en España ya lo hubiera sido fuera. Esto no sería en absoluto producto de un plagio, sino consecuencia casi inevitable de la soledad intelectual en la que se movían los científicos españoles hasta hace algo más de medio siglo.

Claudio Ptolomeo y su teorema

Poco sabemos de la vida de Ptolomeo, tan sólo que nació en Egipto alrededor del año 85 d. de C. y que residió en Alejandría, donde realizó sus estudios astronómicos. Su obra fundamental es un tratado de astronomía en trece libros, titulado *Sintaxis Matemática*, basado en observaciones propias y en la tradición astronómica de griegos y babilonios. Para distinguirla de otro grupo de tratados astronómicos debidos a diferentes autores, se referían a ella frecuentemente con el superlativo griego *megiste* (la más grande), y al colocar el artículo en la traducción árabe quedó *Almagesto*, nombre con la que se conoce desde entonces. El Occidente europeo tuvo las primeras noticias de él a través de la *Astronomía* de Boecio. La versión latina más difundida se debe a Gerardo de Cremona (1114-1187), quien utilizó la traducción al árabe que en el siglo IX había hecho al-Hayyay b. Yusuf a partir de un texto siríaco.

La contribución propiamente matemática de Ptolomeo anda dispersa entre sus escritos astronómicos. En el primer libro del *Almagesto* construye, con el fin de facilitar los cálculos trigonométricos, una tabla de las cuerdas de los ángulos centrales de la circunferencia (la idea de utilizar la semicuerda del ángulo doble, que hoy llamamos seno, aparecería por primera vez en un texto sánscrito del siglo V). Uno de los teoremas que usa en la elaboracion de su tabla, y que desde entonces se conoce como teorema de Ptolomeo, dice así: *En cualquier cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia siempre sucede que la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de las diagonales.* La demostración más conocida es la siguiente:

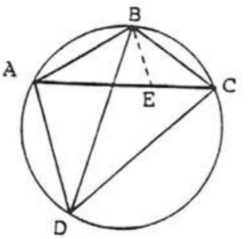


Figura 1

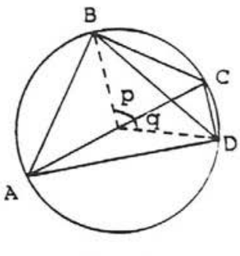


Figura 2

Trazamos desde B una recta de tal manera que los ángulos ABD y EBC sean iguales (ver figura 1). Claramente son semejantes las parejas de triángulos BCE y BDA, ABE y DBC. De cada una de estas semejanzas se deducen las igualdades siguientes:

$$AD\ BC = CE\ BD$$
$$AB\ DC = AE\ BD$$

que sumadas miembro a miembro dan lugar a:

$$AD\ BC + AB\ DC = (AE + EC)BD = AC\ BD,$$

que es lo que pretendíamos probar.

Si AC es un diámetro de la circunferencia y escribimos el teorema de Ptolomeo en función de los ángulos p y q (ver figura 2), llegamos a lo siguiente:

$$\text{cuerda de } (p + q) = DB = \frac{AD\ BC + AB\ DC}{AC} =$$

$$\frac{\text{cuerda}(180° - q)\ \text{cuerda}(p) + \text{cuerda}(180° - p)\ \text{cuerda}(q)}{\text{diámetro}}$$

Mediante esta fórmula y otras semejantes, y partiendo de ángulos cuyas cuerdas son fáciles de calcular, pudo elaborar Ptolomeo una tabla de las cuerdas de todos los arcos desde 1/2° hasta 180°, de medio grado en medio grado, y que es en esencia lo mismo que una tabla actual de senos desde 1/4° hasta 90° de cuarto de grado en cuarto de grado. No sabemos lo que los métodos de Ptolomeo deben a Hiparco de Nicea (de quien dice Teón de Alejandría que escribió un tratado en doce libros sobre las cuerdas del círculo), y en todo caso ignoramos la magnitud de la deuda. Lo cierto es que el *Almagesto* sobrevivió y su tabla de cuerdas fue una herramienta imprescindible para los astrónomos durante más de mil años.

Eduardo León y Ortiz

En 1877 fue publicado en la *Revista de la Sociedad de Profesores de Ciencias* un trabajo de Eduardo León y Ortiz, donde se deducen algunas consecuencias elementales del teorema de Ptolomeo. El profesor León y Ortiz había nacido en Valencia en 1846 y era licenciado en ciencias exactas. En el año de aparición de su artículo trabajaba como ayudante en el Observatorio Astronómico y Meteorológico de Madrid. Ese mismo año ganó la cátedra de álgebra superior y geometría de la Universidad de Gra-

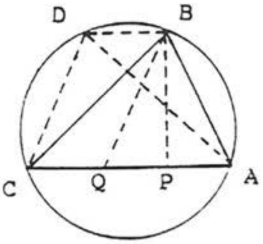


Figura 3

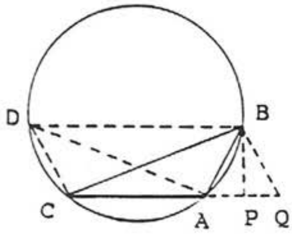


Figura 4

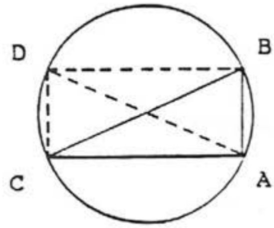


Figura 5

nada, al siguiente pasó a la de Valencia y a partir de 1882 fue catedrático de geodesia de la Universidad Central. Además de varios trabajos de investigación, publicó unos *Elementos de Mecánica* y tradujo el tratado de geodesia de Clarke.

Considera León y Ortiz en el citado artículo un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita, y supone en primer lugar que el ángulo A es agudo (figura 3). Trazamos desde B una paralela al lado AC, que corta a la circunferencia en el punto D. Como los triángulos ABC y CDA son iguales, el teorema de Ptolomeo da lugar a que:

$$BC^2 = BA^2 + CA\ DB.$$

Tirando desde B las rectas BQ (paralela a DC) y BP (perpendicular a CA), resulta:

$$DB = CQ = CA - 2AP.$$

Sustituyendo esta última igualdad en la anterior, tenemos lo siguiente:

$$BC^2 = BA^2 + CA^2 - 2CA\ AP,$$

que es la expresión de un clásico teorema: *En cualquier triángulo, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del producto de uno cualquiera de estos lados por la proyección del otro sobre él.*

Si el ángulo A es obtuso, un razonamiento muy parecido hecho sobre la figura 4 da lugar a esta otra igualdad:

$$BC^2 = BA^2 + CA^2 + 2CA\ AP,$$

que también es un teorema muy conocido: *En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más el doble del producto de uno cualquiera de estos lados por la proyección del otro sobre él.*

Si A es un ángulo recto, es muy fácil ver que el teorema de Ptolomeo da directamente el de Pitágoras (ver figura 5). Estos tres teoremas son a su vez casos particulares del teorema del coseno.

El demostrar estos teoremas mediante el de Ptolomeo tiene la ventaja de que ciertas proposiciones que normalmente se utilizan para demostrarlos, pueden ahora ser deducidas como corolarios suyos. Como ejemplo demuestra León y Ortiz el que la altura de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos que determina sobre la hipotenusa, y también el teorema según el cual para cada par de lados de un triángulo es constante el producto de la longitud de cualquiera de ellos por la proyección del otro sobre él.

Ignacio Beyens

Llamamos hoy fórmula de Herón a la expresión del área de un triángulo en función de sus lados: si p es el semiperímetro de un triángulo de lados a, b y c, su superficie es:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\,.$$

Se la conoce por este nombre porque aparece por primera vez en la *Dioptra* de Herón de Alejandría (de quien sólo tenemos datos inciertos, aunque es muy probable que viviera en esta ciudad en el siglo I de nuestra era). Hoy sabemos por fuentes árabes que la fórmula procede de Arquímedes, y si la encontramos en la *Dioptra* es posiblemente debido a una interpolación. En el siglo VII el matemático indú Brahmagupta descubrió una generalización del teorema de Herón válida para cuadriláteros inscriptibles y que es una de las más bellas consecuencias del teorema de Ptolomeo. La superficie de un cuadrilátero cíclico de lados a, b, c y d y semiperímetro p es:

$$S = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}\,.$$

La oscuridad de los textos impide saber si Brahmagupta era consciente de que su fórmula no era válida para cualquier cuadrilátero (Baskhara, otro matemático indú cinco siglos posterior, ignoraba esta limitación), pero sí sabía que haciendo d = 0 lo era para triángulos.

Una demostración del teorema de Brahmagupta apareció publicada en 1903 en la *Gaceta de Matemáticas Elementales* en un artículo firmado por Ignacio Beyens, de quien tan sólo puedo decir que por esas fechas era teniente coronel de ingenieros. Es un trabajo de divulgación, donde el autor da a conocer una demostración que había encontrado en algunos tratados alemanes y que le pareció poco conocida en España. No es pues una aportación original, con todo vamos a darla porque tiene un cierto interés.

Sea AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = m y BD = n. Desde B y D trazamos perpendiculares a la recta AC, que la cortan en los puntos P y Q respectivamente, y desde D trazamos una paralela a AC, que encuentra a la recta BP en el punto H (ver figura 6).

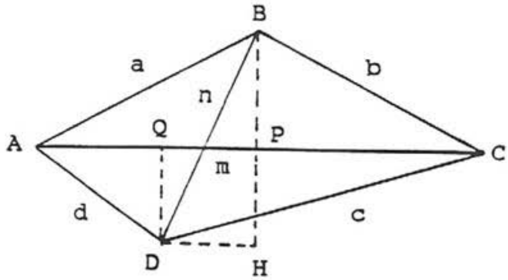


Figura 6

Claramente vemos que sucede lo siguiente:

$$S = \frac{1}{2}\,(BP + DQ)m = \frac{1}{2}BH\;m = \frac{1}{2}m\sqrt{n^2 - PQ^2}\,.$$

Suponiendo que P y Q son interiores al cuadrilátero (en caso contrario el razonamiento que viene a continuación sólo necesita una pequeña modificación), aplicamos a los triángulos ABC y ADC el primero de los teoremas demostrados en el apartado anterior:

$$b^2 = a^2 + m^2 - 2m\,AP,\; c^2 = d^2 + m^2 - 2m\,AQ.$$

Despejamos AP y BQ y restamos ordenadamente las expresiones así obtenidas:

$$PQ = AP - AQ = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2m} .$$

Sustituyendo este valor de PQ en la expresión a la que habíamos llegado para la superficie, y haciendo unas cuentas muy sencillas, tenemos que:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)\ (2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)} .$$

Esta fórmula vale para cualquier cuadrilátero. Si es inscriptible, veremos cómo se convierte en la de Brahmagupta. En efecto, sustituyendo (en virtud del teorema de Ptolomeo) mn por ac + bd, resulta:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{[(a + c)^2 - (b - d)^2]\,[(b + d^2 - (a - c)^2]} =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a + c + b - d)\,(a + c - b + d)\,(b + d + a - c) - (b + d - a + c)}$$

$$= \sqrt{(p - a)\,(p - b)\,(p - c)\,(p - d)} .$$

Alonso Thibinger

Alonso Thibinger fue un padre marianista de origen alsaciano, afincado desde muy joven en nuestro país. Durante su muy larga vida desempeñó diversos cargos, casi todos relacionados con la enseñanza, en distintas casas y colegios que su congregación tenía diseminados por España. Había nacido en el pueblo de Schletstadt en 1870, y a los ventiún años lo enviaron sus superiores al postulantado marianista de Escoriaza, en el País Vasco. En 1903 solicitó y obtuvo la nacionalidad española[1].

De todas las asignaturas que Thibinger impartió durante sus épocas de profesor, era la matemática su predilecta, aunque sus distintas ocupaciones dentro de la orden no le permitieron dedicarse a ella sino muy tangencialmente. Con todo, además de fama de excelente profesor, dejó algunos artículos de investigación publicados en diversas revistas matemáticas españolas. De algunos de ellos vamos a ocuparnos ahora.

En 1903, durante su etapa de Escoriaza, publicó don Alonso en la *Gaceta de Matemáticas Elementales* un trabajo titulado «Aplicaciones notables del teorema de Luchterhand», donde deduce la fórmula de Ptolomeo de un teorema que el profesor Luchterhand de Königsberg había publicado en el *Journal de Crelle* sesenta años antes. Dicho teorema afirma lo siguiente: *En todo cuadrilátero inscriptible, si se multiplica el cuadrado de la distancia de un vértice a un punto cualquiera P del plano, por el área del triángulo formado con los otros tres vértices, la suma de los productos referentes a dos triángulos que tienen por base una misma diagonal, es igual a la suma de los productos relativos a los dos triángulos cuya base común es la otra diagonal.* Dicho más brevemente (ver figura 7):

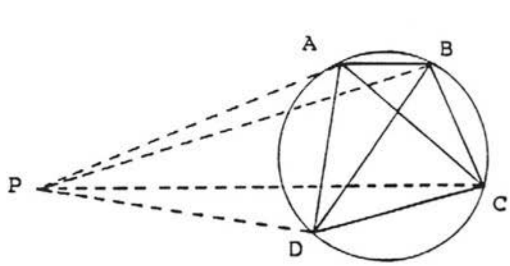


Figura 7

$$PA^2\,[BCD] + PC^2\,[ABD] = PB^2\,[ADC] + PD^2\,[ACB]$$

1 Este breve resumen biográfico procede de un libro escrito por Victoriano Mateo y que me facilitó don Abilio Fraile. A él y al director del Colegio del Pilar agradezco la amabilidad que me dispensaron cuando me acerqué a ellos en busca de datos sobre la vida de don Alonso.

(donde los corchetes significan la superficie del triángulo).

Ahora bien, el área de un triángulo es igual al producto de las longitudes de sus lados dividido por el doble del diámetro de la circunferencia circunscrita, por tanto el teorema de Luchterhand puede ser escrito de esta otra manera:

$$PA^2\, bcn + PC^2\, adn = PB^2\, cdm + PD^2\, abm.$$

Si colocamos el punto P en el vértice D, la última igualdad se convierte en esta otra:

$$d^2\, bcn + c^2\, adn = n^2\, cdm,$$

que simpiflicada por ncd se convierte en el teorema de Ptolomeo.

Si situamos ahora al punto P en el centro de la circunferencia circunscrita, llegamos a la fórmula siguiente:

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

que es la expresión de lo que algunos textos llaman el segundo teorema de Ptolomeo: *En todo cuadrilátero inscriptible, las diagonales son proporcionales a las sumas de los productos de los lados que parten de sus extremos.* De él se deducen fácilmente las fórmulas que dan el valor de la relación de dos lados opuestos:

$$\frac{a}{c} = \frac{bn - dm}{bm - dn}, \quad \frac{b}{d} = \frac{an - cm}{am - cn}.$$

En 1913 publicó Thibinger en la *Revista de la Sociedad Matemática Española* un segundo trabajo sobre el mismo tema. Repite en él las demostraciones de los teoremas de Ptolomeo a partir del de Luchterhand (quizás considerando la escasa difusión que había tenido la *Gaceta de Matemáticas Elementales*) y llega a nuevas fórmulas para el cuadrilátero inscriptible. Hablaremos tan sólo de una de ellas, la única que utiliza el teorema de Ptolomeo y que proporciona la superficie del cuadrilátero en función de los lados y del diámetro f de la circunferencia circunscrita. Consideramos las áreas de los triángulos que tienen por base las diagonales:

$$[ABC] = \frac{abm}{2f} \qquad [DAB] = \frac{dan}{2f}$$

$$[ACD] = \frac{dcm}{2f} \qquad [DCB] = \frac{cbn}{2f}$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades de la izquierda y las dos de la derecha, llegamos a estas otras dos:

$$[ABCD] = \frac{m(ab + cd)}{2f}, \quad [ABCD] = \frac{n(ad + cb)}{2f},$$

que multiplicadas miembro a miembro dan lugar a esta otra:

$$[ABCD]^2 = \frac{mn\,(ab + cd)\,(ad + cb)}{4f^2},$$

Sustituyendo mn por ac + bd y haciendo raíces cuadradas en ambos miembros llegamos a la fórmula buscada:

$$[ABCD] = \frac{\sqrt{(ac + bd)\,(ab + cd)\,(ad + cb)}}{2f}.$$

No es tan bonita como la de Brahmagupta, ni tan útil, porque necesita de más datos, pero también es curiosa. Además generaliza la fórmula para la superficie de un triángulo que hemos usado en su demostración (aunque no queda claro si don Alonso se daba cuenta de esto). En efecto, haciendo D = C (y por tanto d = 0):

$$[ABC] = \frac{\sqrt{acabcb}}{2f} = \frac{abc}{2f}.$$

Augusto Krahe

Augusto Krahe nació en Sevilla el año 1867, hijo de un alemán afincado en España. Comenzó la carrera de ingeniero de caminos, que abandonó antes de acabar por su discrepancia con algunos profesores. Con un grupo de amigos fundó el periódico *Madrid Científico,* en un intento de renovar el ambiente intelectual español, y para vivir se dedicó a la enseñanza privada. Cuando una reforma de los planes académicos creó la sección de Exactas dentro de la Facultad de Ciencias, retomó los estudios y obtuvo el grado de licenciado. En 1906 ganó la cátedra de geometría descriptiva de la Escuela Industrial de Madrid, que desempeñó hasta 1930, año en que murió.

Publicó numerosos artículos en revistas españolas y extranjeras. En el último de ellos, aparecido en la *Revista Matemática Hispano Americana* en 1926, da una demostración del teorema de Ptolomeo haciendo uso de los números complejos. Considera para ello los cuatro vértices A, B, C y D de un cuadrilátero convexo colocados sobre el plano de Gauss, de modo que representen cuatro números complejos z_1, z_2, z_3 y z_4.

Desarrollando el primer miembro de la identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

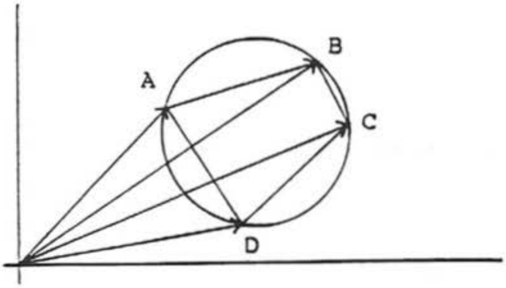


Figura 8

llegamos a esta otra:

$$(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_4 - z_1)(z_3 - z_2) = (z_3 - z_1)(z_4 - z_2).$$

Como la suma de los módulos de los sumandos es mayor o igual que el módulo de la suma, tenemos que:

$$AB\ CD + BC\ AD \geq AC\ BD,$$

lo que significa que en cualquier cuadrilátero convexo la suma de los productos de los pares de lados opuestos es mayor o igual que el producto de las diagonales. La igualdad se da cuando la diferencia de los argumentos de los sumandos del primer miembro sea múltiplo de 2π, y esto pasa si el cuadrilátero es inscriptible. En efecto, en ese caso sucede lo siguiente (ver figura 8):

$$\text{argumento } AB - \text{argumento } AD = \hat{A},$$
$$\text{argumento } BC - \text{argumento } CD =$$
$$\pi + \text{argumento } CB - \text{argumento } CD =$$
$$\pi + C = \pi + (\hat{A} - \pi) = \hat{A},$$

con lo cual ya tenemos que:

argumento AB + argumento CD = argumento BC + argumento AD.

Entonces la desigualdad se convierte en igualdad y llegamos al teorema de Ptolomeo.

Algunos trabajos más

Otros trabajos se publicaron en España sobre el cuadrilátero inscriptible, pero no basados en el teorema de Ptolomeo. En 1913 apareció un artículo de Alonso Thibinger en la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, en el que deduce algunas propiedades del cuadrilátero cíclico partiendo de consideraciones proyectivas. En 1944 publicó Rogelio Masip en la revista *Matemática Elemental* un trabajo donde demuestra varias fórmulas de las distancias entre los elementos del cuadrilátero inscriptible y llega, mediante razonamientos trigonométricos, a la misma fórmula para la superficie a la que había llegado Thibinger. En el mismo año y la misma revista demostró E. Pajares la fórmula de la relación entre las diagonales del cuadrilátero inscriptible. En un artículo publicado en 1948, también en *Matemática Elemental*, y firmado por José Mª Orts, se relacionan las condiciones para que cuatro puntos estén en una circunferencia con las condiciones de equilibrio de un cierto paraboloide de revolución.

BIBLIOGRAFÍA

BEYENS, I. (1903). Sobre el área de un cuadrilátero. *Gaceta de Matemáticas Elementales, tomo I*: 205-206.

BOYER, C. (1992). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

KRAHE, A. (1926). Sobre el teorema de Ptolomeo. *Revista Matemática Hispano-Americana, 2ª serie, tomo I*: 147.

LEON Y ORTIZ, E. (1877). Del teorema de Ptolomeo y alguno de sus corolarios. *Revista de la Sociedad de Profesores de Ciencias, tomo I*: 87-92.

LORENTE DE NO, F. (1931). Don Augusto Krahe. *Revista Matemática Hispano-Americana, 2ª serie, tomo VI*: 15-32.

LUCHTERHAND, (1842). Über die Bedingung, dass fünf Puncte auf der Oberfläche einer Kugel liegen. *Journal de Crelle, tomo XXIII*: 375-378.

MASIP, R. (1944). Cuadrilátero convexo inscriptible. *Matemática Elemental, 4ª serie, tomo IV*: 294-302.

MATEO, V. (1973). *Don Alonso Thibinger, pensador y pedagogo*. Madrid: Ediciones S.M.

OCTAVIO DE TOLEDO, L. (1914). Don Eduardo León y Ortiz. *Revista de la Sociedad Matemática Española, tomo IV*: 1-5.

ORTS, J. Mª, (1948). Sobre el pentágono inscriptible. *Matemática Elemental, 4ª serie, tomo VIII*: 10-12.

PAJARES, E. (1944). Nota de geometría elemental. *Matemática Elemental, 4ª serie, tomo IV*: 303-304.

REY PASTOR, J. y BABINI, J. (1986). *Historia de la matemática.* Barcelona: Gedisa.

THIBINGER, A. (1903). Aplicaciones notables del teorema de Luchterhand. *Gaceta de Matemáticas elementales», tomo I*: 154-155.

THIBINGER, A. (1913). Sobre una clase de cuadriláteros. *Revista de la Sociedad Matemática Española, tomo III*: 33-41.

THIBINGER, A. (1914). Estudio de algunas propiedades del cuadrilátero inscriptible. *Revista de la Sociedad Matemática Española, tomo III*: 160-167.

VERNET, J. (1978). *La cultura hispanoárabe en Oriente y Occidente*. Barcelona: Ariel.

Resumen

Este artículo trata sobre la historia del teorema de Ptolomeo en España y el interés que despertó en varios matemáticos españoles. Algunos de ellos, como León y Ortiz, Beyens, Thibinger y Krahe, trabajaron sobre él encontrando nuevas demostraciones, deduciendo corolarios o divulgando resultados poco conocidos.

Palabras clave: historia, matemáticas, Ptolomeo.

Abstract

This article is about the History of Ptolomeo's theorem in Spain and the interest it aroused in various Spanish mathematicians. Some of them, like León y Ortiz, Beyens, Thibinger y Krahe, worked on it finding new demonstrations, deducing new corollaries or spreading some of its results.

Key words: history, mathematics, Ptolomeo.

Ricardo Moreno Castillo
C/ Lope de Rueda, 29 - 2º centro
28009 MADRID - ESPAÑA.

La aritmética árabe durante la Edad Media. Antiguos problemas aritméticos árabes

Concepción Romo Santos

1. Introducción

ARABIA, la cuna del Islam, se encuentra situada en una gran península. Durante la segunda mitad del siglo VI, Arabia estaba habitada por beduinos, que no sabían leer ni escribir, y en este marco sociopolítico surgió el profeta Mahoma, que nació en la Meca hacia el año 570. Mahoma predicó y enseñó su doctrina en la Meca, pero el 622, viendo su vida amenazada por un complot, aceptó una invitación para trasladarse a Yatrib, más tarde denominada Medina. Esta «huida», conocida como la Hégira, señala el comienzo de la Era Mahometana, que iba a ejercer durante siglos una poderosa influencia en el desarrollo de la matemática.

Mahoma se convirtió en un líder militar a la vez que religioso y diez años más tarde había conseguido formar un estado mahometano cuyo centro era la Meca, y en el que los judíos y los cristianos, que eran también monoteístas, gozaban de protección y de libertad de culto. En el año 632, mientras planeaba atacar el Imperio Bizantino, murió Mahoma en Medina; esta muerte repentina no logró impedir la expansión del Estado islámico apenas fundado, ya que sus seguidores invadieron los territorios fronterizos con una rapidez inusitada. En unos pocos años cayeron en poder de los conquistadores Damasco, Jerusalén y la mayor parte del valle mesopotámico, y el 641 fue capturada Alejandría, que había sido durante casi mil años el centro matemático del mundo.

Durante más de un siglo los conquistadores árabes lucharon entre sí y con sus enemigos, hasta que hacia el año 750 el espíritu guerrero cedió al fin. Por esta misma época surgió un cisma entre los árabes de Occidente que ocupaban España y Marruecos y los árabes del Oriente que tenían su capital en Bagdad. La unidad del mundo era más económica y religiosa que política. Los árabes asimilaron la cultura de las civilizaciones que habían invadido.

En este trabajo estudiaremos los principales avances aritméticos árabes durante la Edad Media y resolveremos también algunos antiguos problemas aritméticos árabes.

2. Al-Khuwarizmi

Durante el primer siglo del Imperio Musulmán no se produjo ningún desarrollo científico, pero en la segunda mitad del siglo VIII fueron llamados a Bagdad sabios procedentes de Siria, Irán y Mesopotamia, incluidos entre ellos judíos y cristianos nestorianos; bajo los califatos de los tres grandes protectores abbasíes de la cultura, Al-Mansur, Haroun Al-Raschid y Al-Mamún, se convirtió Bagdad en una nueva Alejandría. Durante el reinado del segundo de estos califas, conocido sobre todo por los cuentos de «Las mil y una noches», se tradujo al árabe parte de la obra de Euclides, pero cuando los árabes dieron rienda suelta a su pasión por las traducciones fue durante el califato de Al-Mamún (809-833). Se dice que el califa tuvo un sueño en el que se le apareció Aristóteles, y en consecuencia Al-Mamún decidió hacer traducir al árabe todas las obras griegas que se tuvieran a mano, incluido el Almagesto de Ptolomeo y una versión completa al fin de los Elementos de Euclides.

Al-Mamún fue quien fundó en Bagdad la «Casa de la Sabiduría» comparable al antiguo Museo de Alejandría. Entre los miembros de esta especie de Universidad estaba un matemático y astrónomo, Mohamed ibn-Musa Al-Khuwarizmi. Este matemático que debió morir algo antes del año 850, además de tablas astronómicas y tratados sobre el astrolabio y el reloj de sol, escribió Al-Khuwarizmi dos libros sobre aritmética y álgebra. El primero de ellos nos ha llegado sólo a través de una copia única de una traducción latina con el título «Libro de la Adición y la Sustración a partir del cálculo de los hindús» de la cual el original árabe se ha perdido. En esta obra, que estaba basada presumiblemente en una traducción árabe de Brahmagupta, daba Al-Khuwarizmi una exposición tan completa del sistema de numeración hindú, que es él probablemente el responsable de la extendida aunque falsa impresión de que nuestro sistema de numeración es de origen árabe.

Al-Khuwarizmi a través de su obra «Al-jabr wal mugabalah» nos ha transmitido la palabra álgebra que se deriva de este título, cosa natural si se tiene en cuenta que fue de este libro del que aprendió más tarde Europa la rama de la matemática que lleva ese nombre. El Aljabr viene a estar, más próxima al álgebra elemental moderna que las obras de Diofanto o de Brahmagupta, ya que este libro no trata de difíciles problemas de análisis indeterminado, sino de la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, especialmente de las de segundo grado. El Al-jabr nos ha llegado en dos versiones, la árabe y una traducción latina. La palabra árabe «al-jabr» significa transferencia de términos al otro miembro de una ecuación y «mugabalah» cancelación de términos iguales en ambos miembros. La palabra árabe «aljabr» se convirtió en álgebra al transcribirla al latín.

3. La aritmética árabe

3.1. El sistema decimal

Los musulmanes fueron los primeros en escribir los números como lo hacemos ahora. Si bien podemos considerarnos herederos de los griegos en lo que concierne a la Geometría, podemos decir que buena parte del legado de los árabes es nuestra Aritmética.

La Aritmética de Al-Khuwarizmi es la primera obra conocida en la que el sistema decimal y las operaciones efectuadas haciendo uso del mismo son objeto de una atención especial. El título de la obra es «Libro de la Adición y la Sustración a partir del cálculo de los hindús». Sus primeras frases, tras las rituales alabanzas a Dios, propias de aquellos tiempos son: «... hemos decidido exponer la forma de contar de los hindús con la ayuda de IX caracteres y enseñar como, gracias a su simplicidad y concisión, estos caracteres permiten expresar todos los números».

Tras explicar con detalle el sistema decimal de numeración mediante las cifras usadas en la India, junto con un pequeño círculo semejante al cero, da las normas que permiten pronunciar los diferentes números y define los conceptos de unidad, decena, centena, etc.

A modo de ejemplo, propone el número:

1 180 703 051 492 863

que lee: un millar de millar de millar de millar de millar (cinco veces) y ciento ochenta millares de millar de millar de millar (cuatro veces) más setecientos tres millares de millar de millar (tres veces) y cincuenta y un millares de millar (dos veces) y cuatrocientos noventa y dos millares y ochocientos sesenta y tres.

Describe a continuación las operaciones de cálculo. Veamos, el ejemplo que propone para la multiplicación de 2326 por 214

2326	→	2326
214		428
		428326
428326		428326
214	→	642
		492226
492226		492226
214	→	428
		496486
496486		496486
214	→	1284
		497764
497764		

Análogamente, la división de 48468 entre 324 se efectúa como sigue

1				
46468				
324				
1		14		
14068	→	14068		
324		324		
		14		143
		1108	→	1108
		324		324
				143
				136
				324

La numeración de posición se fue imponiendo con gran lentitud. Una gran parte de la población seguía utilizando el sistema estrictamente literal. Así están escritos los números en el «Libro de la Aritmética necesaria a Escribas y Comerciantes», escrito por Abù-l-Wafà entre los años 961 y 976, y lo mismo ocurre al célebre libro de Aritmética de Al-Karagi, «Libro que resulta suficiente para la ciencia de la Aritmética», escrito entre finales del siglo X y comienzos del XI.

Unos 150 años después de que Al-Khuwarizmi escribiera su libro de Aritmética nació, en la región al Sur del Mar Caspio, Kusair ibn Labban al-Gili. Su tratado de Aritmética, «Principios del Cálculo de los Hindús» se convirtió en uno de los libros de texto de Aritmética más importantes en el mundo islámico.

Este libro de al-Gili es una breve pero excelente introducción a la Aritmética y explica el sistema decimal de numeración.

3.2. Las fracciones decimales

En la actualidad, para representar el resultado de la fracción restante de una división, se usan fracciones decimales exclusivamente, y no las fracciones sexagesimales como era habitual en el mundo islámico. Una evidencia de esta afirmación la podemos encontrar en el «Tratado de Aritmética hindú», de Al-Uglidisi, escrito en Damasco durante los años 952-953. El nombre de Al-Uglidisi indica que el autor se dedicaba a copiar manuscritos de Euclides, pero aparte de este detalle, no se conoce nada más de su vida, pese a que parece ser el primer hombre que utilizó las fracciones decimales con la ayuda de un punto (o una coma), y por lo tanto, fue pionero en la escritura de los números tal como lo hacemos ahora. Hagamos notar, sin embargo, que el propio Al-Uglidisi dice explícitamente en el prólogo de su obra que se había tomado la molestia de recopilar los mejores métodos de los autores que le precedieron. Esto induce a poner en duda la paternidad de Al-Uglidisi respecto de las fracciones decimales, pero la ausencia total de las mismas en las diferentes fuentes hindús indican con una seguridad casi absoluta que las fracciones decimales son un descubrimiento de la Matemática del mundo Islámico.

Al cabo de algo menos de un siglo, otro autor musulmán, Abù Mansur al-Baghdadi, usaba también fracciones decimales para calcular décimas partes de una cantidad.

Dos siglos más tarde en los escritos de al-Samawal en 1172 se introducen las fracciones decimales como parte de un método general de aproximación de números con la precisión que se desee y dentro del contexto de la división y la extracción de raíces cuadradas.

A comienzos del siglo XV las fracciones decimales reciben un nombre propio y un tratamiento sistemático en la obra de Jamshid al-Kashi en la que, por ejemplo, se multiplican dichas fracciones exactamente igual que como lo hacemos en la actualidad. También en el siglo XV, un texto Bizantino de Aritmética describe como «turco» (es decir, procedente del mundo islámico) el método de representar

$$153\frac{1}{2} \text{ y } 16\frac{1}{4}$$

por

$$153'5 \; y \; 16'25$$

respectivamente, y su producto como 2494'375.

4. Antiguos problemas aritméticos árabes

Propondremos una serie de problemas recreativos, enmarcados en la historia de Europa durante la dominación árabe.

Problema 1. Agrimensura nazarí

Abelardo Tomadatos estudia una escritura donde se refiere cómo los Reyes Católicos, tras la conquista de Granada, repartieron su vega entre los caballeros que les acompañaron en la lucha. Al margen del pergamino alguien efectuó una división de la superficie de la tierra (medida en fanegas nazaríes) entre el número de caballeros, para determinar el lote que correspondía a cada uno.

Desgraciadamente, la última empleada para la división era de peor calidad y todas las cifras resultan ilegibles menos dos. Del cociente no se distingue absolutamente nada. He aquí lo que Tomadatos tiene en su vista:

```
. . . . . 5 . . . 8 |. . .
. . .
    . . . .
    . . .
        . . . .
        . . . .
            . . . .
            . . . .
```

Como puede verse, la división está hecha a estilo antiguo, es decir escribiendo para cada cifra del cociente la resta completa. Tomadatos tiene mucho interés en conocer tanto el número de caballeros como el de fanegas nazaríes contenidas en la vega de Granada. ¿Podemos ayudarle?

Solución

La división lleva decimales. La cifra bajada más allá del 8 debe de ser cero.

El segundo residuo parcial es menor que 10, pese que a su minuendo tiene cuatro cifras y su sustraendo 3. Luego el primero debe ser 1.005 (termina en 5) y el segundo mayor de 995.

El último sustraendo terminaría también en 5 ó en 0, y ya hemos visto que no es así. Luego este es 996 ó 998.

Con lo cual el tercer minuendo, que tiene cuatro cifras, enpieza en 7 ó en 9. Como se bajaron dos cifras en él, el divisor será mayor de 700. Luego es 996 ó 998 (la cuarta cifra del cociente es uno).

El último sustraendo es cinco veces 996 ó 998 (o sea, 4.980 ó 4.990). Siendo su penúltima cifra un 8, sólo es posible 4.980.

Por tanto el tercer minuendo debe empezar con 9, y su sustraendo es 996 por 9, es decir 8.964. Fácilmente se deduce el resto de la división.

```
9 9 7 0 0 5 0 1 3 8 |9 9 6
9 9 6                1 0 0 1 0 0 9 0'5
  1 0 0 5
    9 9 6
        9 0 1 3
        8 9 6 4
          4 9 8 0
          4 9 8 0
```

Problema 2. Lo que ocurrió a Zoraida

Zoraida, la bella hija de Muhammad I tenía muchos pretendientes. Pero ella no deseaba casarse con un príncipe guapo o rico. Quería por esposo a un hombre inteligente. Por ello los pretendientes fueron examinados. Los que no superaban el examen eran rechazados y volvían tristes a sus tierras. No hubo forma de desempatar entre Alí, Abdulá y Yaser. Los tres eran tan inteligentes que pasaban con éxito todas las pruebas. Un anciano derviche, propuso la siguiente manera de seleccionar al esposo de Zoraida. Pidió cinco discos, dos blancos y tres rojos. Luego habló así a los príncipes:

- Colocaré un disco a la espalda de cada uno de vosotros. Se casará con nuestra princesa el primero que adivine cual es el color del disco que lleva. Para ello seguiréis estas normas:

El primero que quiera adivinar el color de su disco, verá la espalda de sus dos compañeros. Si no acertase, se marchará y el segundo para adivinar podrá ver el disco que tiene su tercer compañero. Si no acertase, el tercer príncipe deberá adivinar sin haber visto nada. Alí quiso ser el primero. Después de observar los discos de sus compañeros, dijo en voz baja al derviche el color de su disco. El derviche movió negativamente la cabeza y Alí se marcho triste a su patria. Yaser pidió ser el siguiente. Solamente podía ver el disco de Abdulá. Tampoco acertó y se retiró con pesadumbre. Finalmente, Abdulá, sin ver nada, dijo al derviche el color de su disco. ¡Había acertado! Se casó con Zoraida, fueron felices...

PREGUNTA: ¿Qué colores pudo ver Alí en los discos de sus dos compañeros?

¿De qué color era el disco de Abdulá?

Solución

Si Alí hubiera visto dos discos blancos, hubiera sabido que tenía un disco rojo. Luego Alí no vio dos discos blancos; vio, o un disco rojo y uno blanco o dos discos rojos.

Yaser era inteligente y supuso el razonamiento de Alí. Si hubiera visto un disco blanco, hubiera adivinado enseguida que el suyo era rojo. Luego vio un disco rojo.

Abdulá, que comprendió los razonamientos de Alí y Yaser dedujo enseguida que su disco era rojo.

Problema 3. Abdulá, el vendedor de seda

Abdulá había traído desde el Oriente a Madrid unas preciosas piezas de seda. Abdulá hizo este trato con su criado Alí:

Si vendo la seda por 100 dinares, te pagaré 20 en compensación por los servicios que me has prestado. Si la vendiera por 200, Alá sea loado si así fuere, sería aún más generoso y te daría 30 dinares.

Sucedió que Abdulá vendió su preciosa seda por 140 dinares. Entonces habló así a su criado:

— Te prometí que si vendía la seda por 200 dinares te pagaría 30. Esto es, por cada 20 dinares (la décima parte de 200) 3 dinares (décima parte de 30). Como la he vendido por 140 dinares (7 veces 20) te pagaré 21 dinares (7 veces 3).

Alí no estaba de acuerdo:

— Me prometiste que si vendías la seda por 100 dinares me pagarías 20. Esto es, por cada diez dinares (décima parte de 100) 2 dinares (décima parte de 20). Has hecho la venta por 140 dinares (14 veces 10); debes pagarme 28 dinares (14 veces 2).

¿Cuántos dinares debe pagar Abdulá a Alí?

Solución

Abdulá debía haber pagado 20 dinares por los 100 primeros (el 20%) y 4 dinares por los 40 últimos (el 10%). En total 24 dinares.

Problema 4. Mustafá, el vendedor de perlas

Era un comerciante honrado, que disfrutaba con la belleza de su mercancía. En una ocasión compró una colección de ocho magníficas perlas. Eran iguales en tamaño, forma, brillo, color... menos en el peso. Siete pesaban lo mismo y la restante era un poco más ligera. Mustafá hubiera podido «colarla» y venderla al mismo precio que las demás, pero ya sabemos que era muy honrado.

Para averiguar cual era la perla ligera, disponía de una sencilla balanza de dos platillos.

a) ¿Podríamos ayudarle a decidir cual era la perla ligera? ¿Cuántas veces hemos utilizado la balanza para ello?

b) Más difícil: Vamos a ayudarle a detectar la perla ligera usando la balanza solamente dos veces.

Solución

a) Se puede hacer tomándolas de una en una, hasta que un platillo quede más alto. Ese platillo contiene la perla ligera.

b) Se hacen con las ocho perlas tres grupos, dos de tres perlas cada uno y uno de dos perlas. Se colocan en cada platillo de la balanza un grupo de tres perlas. Pueden ocurrir dos situaciones.

1) La balanza queda en equilibrio. Entonces la

perla ligera es una de las dos que no se han colocado en la balanza. Poniendo una de esas perlas en cada platillo, uno de ellos quedará más elevado: es el que contiene la perla ligera.

2) La balanza no está en equilibrio. Entonces la perla ligera está en el grupo de tres situado en el platillo de la balanza más alto. Se coloca una perla de ese grupo en cada platillo. Si la balanza está en equilibrio, la perla ligera es la que no se ha puesto en la balanza. Si un platillo está más elevado, ese platillo contiene la perla ligera.

Problema 5. Doña Leoncia la salinera

En tiempos de la dominación árabe, Madrid poseía las salinas de Espartinas, pero además hubo una mujer y en aquellos tiempos no era muy frecuente la mujer empresaria, dedicada al negocio de la sal. Esa fue Doña Leoncia.

Doña Leoncia era una buena comerciante, pero tenía un defecto: le gustaba mucho el dinero que (honradamente) ganaba con su sal. Guardaba en una caja unos ducados de oro y por la noche los contaba amorosamente. Si los colocaba en montones de tres, le quedaba un ducado sin colocar. Lo mismo le ocurría cuando los colocaba en montones de cuatro y en montones de cinco. Cuando los colocaba de siete en siete no sobrabá ningún ducado.

a) ¿Qué ocurría cuando los colocaba de dos en dos? ¿Y cuando hacía montones de seis?

b) ¿Cuál era el menor número de ducados que podía tener Doña Leoncia? (Había quien decía que tenía 301 ducados).

Solución

a) Cuando colocaba las monedas de dos en dos, le sobraba un ducado porque el número de monedas era un múltiplo de cuatro más uno. También le sobraba un ducado al colocarlos de seis en seis porque el número de monedas era igual a uno más un múltiplo de tres y de cuatro.

b) El número de monedas menos uno, debía ser múltiplo común de tres, cuatro y cinco; o sea múltiplo del mínimo común múltiplo de 3, 4 y 5: 60. De entre los múltiplos comunes a 60 (más 1) hay que tomar el que sea divisible por 7: 61, 121, 181, 241, 301. 301 es el menor número que cumple esas condiciones. Luego Doña Leoncia tenía por lo menos 301 ducados.

BIBLIOGRAFÍA

ALBAIGES OLIVART, JOSÉ M. (1981). *¿Se atreve Vd. con ellos?* Barcelona-México: Marcombo. Boixareu Editores.

BOYER CARL, B. *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

ROMO, C.; BUJANDA, P. (1991). *Historia de Madrid a través de las Matemáticas.* Madrid: Servicio de Educación. Ayuntamiento de Madrid.

TARRES FREIXENET, J. (1994). *La matemática árabe*. Curso de Historia de la Matemática. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Resumen:

En este trabajo estudiaremos los principales avances aritméticos árabes durante la Edad Media y resolveremos también algunos antiguos problemas aritméticos árabes.

Palabras clave: Álgebra, Aritmética, Historia de las Matemáticas, Numerales árabes, Problemas Recreativos.

Abstract:

In this work we study the mathematics arabian and we resolve the recreative problems.

Key words: Algebra, Aritmetic, Arabic numerals, history of mathematics, the recreative problems.

Concepción Romo Santos
Departamento de Álgebra
Ciudad Universitaria
Universidad Complutense de Madrid
28040 MADRID

El uso de la historia de las matemáticas en clase: el ejemplo de la cartografía y la navegación

Bartolomé Barceló

Introducción

LAS Matemáticas ocupan un lugar principal en la escuela. Los estudiantes consagran a las Matemáticas prácticamente todos los años de su enseñanza primaria y secundaria. Por otro lado, esta asignatura ha demostrado ser un obstáculo para que muchos estudiantes pudiesen completar sus estudios en la escuela. Hace tan sólo unos días, una madre de familia me preguntaba por qué hay tantas Matemáticas en los planes de estudio, al menos una por año, y si no se podrían sustituir por otro tipo de enseñanzas. Su pregunta era más bien una queja, porque a continuación afirmaba que eran motivo de fracaso para muchos estudiantes y que aún en el caso de un estudiante provechoso, éstas eran algo inútiles por ser un conjunto de técnicas y simbolismos que luego se olvidaban fácilmente. Su observación es interesante porque es el tipo de cuestión que se plantean muchos padres e incluso educadores.

La respuesta a mi entender es clara. Así como lo puedan ser la Historia o la Literatura, las Matemáticas forman por una lado una parte importante de nuestra cultura y por otro son una de las pocas asignaturas que obligan a pensar, siendo ello como un entrenamiento mental. Si se toma como adecuado este punto de vista entonces entonces está también más o menos claro como proseguir.

Han formado parte de la cultura como un desafío al intelecto humano. Ejemplos hay muchos, pongamos unos cuantos. El descubrimiento de los números irracionales, que echó abajo toda una filosofía del mundo e hizo obsoletos muchos de los razonamientos geométricos de la Antiguedad. Los problemas clásicos de los griegos de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo han sido una guía y estímulo constante para sabios de todas las épocas hasta quizás finales del siglo pasado, cuando F. Lindemann demostró la tracendencia del número π en 1882. Los turbulentos episodios renacentistas de Tartaglia y Cardano referentes a la resolución de las cúbicas, etcétera, etcétera. Ahora bien, ¿Contienen nuestros planes de estudio estos hechos? Yo diría más bien que no. Aunque tampoco ello es esencial, ya que el educador o profesor de Matemáticas los puede ir incorporando como ejemplos o anécdotas que vayan enriqueciendo el proseguir del día a día del programa de la asignatura. El plan de Matemáticas de la educación primaria o secundaria debería satisfacer las necesidades de todos los alumnos, contribuir a la formación del estudiante en general y ofrecer preparación

tarbiya, nº 15. 1997. Págs. 65-77

profesional a quienes usarán más tarde las Matemáticas, como los ingenieros y científicos ya que son la base de nuestra civilización tecnológica, o también por ejemplo para las Ciencias Económicas y Sociales, que pueden hacer progresivamente más uso de las Matemáticas en el futuro.

Sobre el hecho de que las Matemáticas son una de las pocas asignaturas que obligan a pensar no vamos a hacer ningún comentario, ya que parece fuera de toda duda el bien que hace en la formación de una persona, en nuestro caso de un estudiante, el tener una mente abierta, clara y juiciosa capaz de afrontar los problemas que vayan apareciendo a lo largo de la vida.

Uno de los defectos que más se observan en los libros de texto de las Matemáticas es el excesivo uso del simbolismo y las nomenclaturas. Este verano pasado mantuve una conversación con una profesora de escuela en la especialidad de Matemáticas, en la que me decía que las Matemáticas son sólo símbolos y su manejo. Ni que decir tiene que me apenó seriamente y me dejó preocupado el hecho de que una educadora pueda pensar así. Morris Kline, en su libro *El fracaso de la matemática moderna* expone las siguientes reflexiones que suscribimos plenamente: «El simbolismo puede servir para tres fines. Puede comunicar eficazmente las ideas, puede ocultar las ideas y puede ocultar la ausencia de ideas. A menudo parece como si algunos de los textos de Matemáticas usasen el simbolismo para ocultar la pobreza de ideas. En otros casos, el propósito de su simbolismo parece ser el de hacer inescrutable lo evidente y evitar así su comprensión ... Las ideas y los argumentos con los que trabaja un matemático tienen una realidad física, intuitiva y geométrica mucho antes de ser expresados mediante símbolos. Vemos entonces que los símbolos de las Matemáticas, como las notas musicales, son simplemente una escritura artificial sin significado intrínseco.»

A lo largo de los últimas décadas ha habido numerosos intentos en reformar y cambiar los planes de estudio para hacerlos más interesantes y más adecuados para la formación de los estudiantes. Uno de ellos fue él, a nuestro juicio nefasto, experimento educativo que se llamó no muy apropiadamente, la matemática moderna. Otras corrientes más actuales han intentado utilizar las calculadoras y las nuevas tecnologías como herramienta importante en la enseñanza matemática. Probablemente de un poco igual cuales sean los contenidos de los planes de estudio. Lo realmente importante es saber transmitir el buen gusto y el placer que hay detrás de las buenas ideas matemáticas. Esto es porque más que un conjunto de conocimientos, es más importante tener una mente preparada para saber afrontar los problemas. En este sentido hay textos que podríamos denominar ya clásicos, escritos por unos de los más importantes matemáticos y profesores de este siglo, que deberían ser un modelo para todos los educadores. Por ejemplo *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* de Félix Klein, *¿Qué es la Matemática?* de R. Courant y H. Robbins, o los escritos del español y luego exiliado en Argentina, Julio Rey Pastor. No estaría demás tampoco echar la vista atrás y recordar que el plan de la escuela de los Pitagóricos, el *Quadrivium*, consistía en el estudio de la Aritmética, Geometría, Música y Astronomía, a los que en la Edad Media se añadió el *Trivium* consistente en Gramática, Lógica y Retórica. Estas eran las siete artes liberales que se consideraron como los conocimientos que debía tener toda persona educada.

Una propuesta para mejorar la calidad de nuestra enseñanza, es usar la Historia de las Matemáticas. Se pueden hacer comentarios históricos, incorporar anécdotas y adaptar los ejemplos y ejercicios que usemos con problemas que hayan tenido cierto interés o relevancia histórica. De este modo, además de hacer amena e interesante la clase afrontamos directamente el objetivo de aprender Matemáticas dando al mismo tiempo una formación cultural. Se podría organizar algún seminario o grupos de trabajo de acuerdo con este fin. Una posible lista de temas es la que sigue:

1. La construcción de los polígonos regulares con regla y compás.
2. La sucesión de Fibonacci y la sección aúrea.
3. Tartaglia, Cardano y la controversia de la cúbica.
4. Arquímedes y su método. Sobre la esfera y el cilindro.
5. La cicloide.
6. Mapas y proyecciones de mapas.
7. La espiral logarítmica.
8. La historia del número π.
9. El problema de la braquistocrona.
10. El Teorema de Morley.
11. Como transformar movimiento circular en rectilíneo. El «linkage» de Peaucellier.
12. Huygens y el péndulo cicloidal.
13. Las matemáticas y la música.
14. La controversia de la cuerda vibrante.

Las Matemáticas de la cartografía y la navegación

Uno de los temas más fascinantes, en parte popularmente desconocido, relacionados con las Matemáticas es la historia de la cartografía y de la navegación. Vamos a exponer sin extendernos demasiado las principales ideas de esta relación.

Nuestro relato empieza con Pitágoras de Samos (560-480 a.C.). Como es sabido Pitágoras se estableció en Crotona, una ciudad al sur de Italia, y allí fundó una sociedad secreta religiosa y filosófica. No sólo descubrió su famoso Teorema, sino que estableció una mística relación entre los números naturales y los movimientos de los planetas y las armonías musicales. Pitágoras jugaba con piedras a orillas del mar, y de sus disposiciones geométricas demostraba teoremas. Utilizando los números cuadrados se observa por ejemplo que

$$1+3+5+ \ldots +(2n+1)=(n+1)^2$$

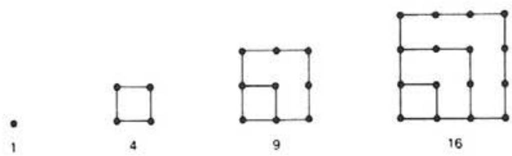


Figura 1

Su escuela descubrió también la existencia de los números irracionales, provocando con ello una de las más importantes crisis que ha tenido la Matemática.

En el tema que aquí nos interesa Pitágoras fue el primero en descubrir que la Tierra era en realidad redonda y no plana. De como dedujo este hecho es desconocido, aunque probablemente observaría que la Tierra deja una sombra redonda en los eclipses de la Luna y que los barcos se iban hundiendo en el las aguas del Mediterráneo a medida que se iban alejando de la costa. Quizás también porque la esfera es la más bonita de las figuras geométricas, y por ello la Tierra, el sol, la luna y los otros cuerpos celestes deben de tener esta forma esférica. Argumentos de este tipo nos han llegado a través de Aristóteles en su libro *De coelo*.

Una vez aceptado que la Tierra tiene forma esférica es natural preguntarse acerca de su tamaño. Eratóstenes (276-194 a.C.), sabio y bibliotecario de la biblioteca de Alejandría, que es también conocido por la criba para hallar números primos y autor de unos de los mejores mapas del mundo conocido de la época, calculó la longitud de la circunferencia terrestre. Su argumento es de una sencillez extraordinaria. Observó que en Siena, al mediodía del solsticio de verano, los rayos del sol entraban verticalmente hasta el fondo de un pozo, mientras que en la ciudad de Alejandría el sol producía una sombra en un palo clavado verticalmente en el suelo. Eratóstenes observó que la inclinación de la sombra era de 1/50 de arco de circunferencia. Como Siena y Alejandría estaban sobre el mismo meridiano y la distancia entre ellas era de unos 5.000 estadios, la Tierra tendría por tanto una circunferencia de unos

$$50 \times 5.000 = 250.000 \text{ estadios.}$$

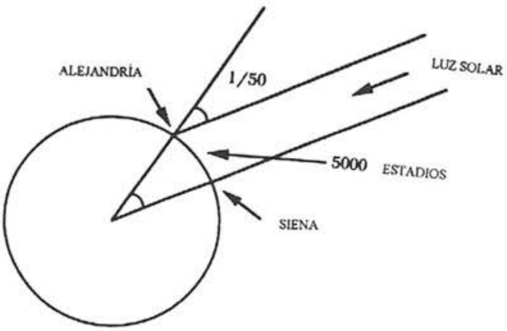


Figura 2

Aunque ahora no se sabe con certeza, parece ser que la medida de un estadio corresponde con nuestra medida actual de 167.7 metros. Luego el cálculo de Eratóstenes da 250.000 x 167.7 = 41.925.000 metros. Como se ve, no muy lejos de la realidad. Es realmente un toque de genialidad que a una persona se le ocurra determinar el tamaño de la Tierra con solo la sombra de un palito.

La siguiente medida conocida de la Tierra fue debida al geógrafo, astrónomo y maestro de Cicerón Posidonius (135-51 a.C.). Posidonius observó que cuando la estrella Canopus se veía justo sobre el horizonte en la ciudad de Rodas, ésta aparecía en lo alto en Alejandría con una inclinación de un ángulo de 1/48 de circunferencia. Como a su vez la distancia entre Rodas y Alejandría era de 5.000 estadios, el cálculo de Posidonius para la circunferencia terrestre es de 5.000 x 48 = 240.000 estadios. Algo menos que le estimación de Eratóstenes y más errónea. Aunque la idea de Posidonius era correcta, no tuvo en cuenta que cuando la estrella Canopus se ve justo en el horizonte, está en realidad más abajo debido a la difracción que sufren los rayos de luz al atravesar la atmósfera.

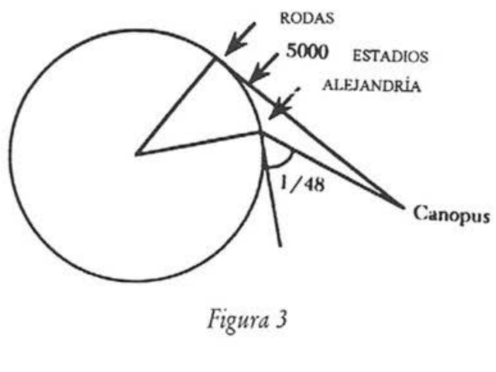


Figura 3

Estas medidas de la Tierra fueron comentadas por el geógrafo griego Estrabón (64 a.C.-25 d.C.) en su obra *Geographiae*. Estrabón criticó el método de Eratóstenes, y no sólo tomó como más adecuada la estimación de Posidonius, sino que al transcribirla se equivocó y escribió que esta era de 180.000 !! estadios.

El error ha tenido su trascendencia ya que fue aceptado posteriormente por Claudio Ptolomeo

(100-178) en su obra *Geographiae* y usado por Cristóbal Colón (1451-1506) en sus cálculos de la distancia que habría que navegar hacia el oeste para encontrarse con las Indias. Colón, además de dar un prueba definitiva de que la Tierra no era plana, hallaría con su viaje una nueva ruta, esta vez por mar, para enlazar Europa con el rico comercio de telas y especias de Oriente. Para estimar la distancia usó la medida de la circunferencia de la Tierra junto con el tamaño del continente asiático y de la distancia entre éste y Japón que Marco Polo había dado. De este modo calculó que el proyectado viaje sería de unas 3.000 millas mientras que la distancia correcta es de unas 11.000. En el año 1484 presentó su proyecto al rey Juan II de Portugal quién tenía un consejo científico asesor en materias de navegación, la *Junta dos Mathemáticos*. Portugal llevaba entonces la cabecera mundial en materia de exploraciones naúticas, principalmente en las costas africanas del Atlántico. Los expertos de la Junta, conocedores de que los cálculos de Colón eran demasiado optimistas, desaconsejaron entonces la empresa. Como es sabido, Colón se dirigió entonces a la corte española de Isabel y Fernando en busca de financiación para su viaje. En España, donde quizás debido al fuerte influjo de la Iglesia y de la Inquisición los científicos no estaban muy bien considerados, aceptaron los argumentos de Colón y aprobaron su viaje. Aunque sea materia de especulación, Colón sabía probablemente que sus cálculos no eran correctos, pero quería hacer a toda costa el viaje de exploración. Lo curioso del caso es que se encontró con América justo donde tenía previsto encontrar las Indias, a unas 3.000 millas de la costa y cuando estaba ya a punto de dar la vuelta de regreso. La paradoja de todo este asunto es que ahora se hable español y no portugués en prácticamente toda Sudamérica, a excepción de Brasil.

El interés por la cartografía y la navegación creció espectacularmente en el siglo XVI a consecuencia de los descubrimientos. Para determinar la posición de un punto sobre la esfera terrestre podemos usar las coordenadas terrestres (φ,θ) φ es lo que se llama *latitud* y θ se denomina *longitud*. Para establecer un punto de partida, suele tomarse como $\theta = 0$ el meridiano de Greenwich. La relación entre estas coordenadas y las usuales coordenadas cartesianas del espacio está dada por

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\cos\theta \\ y = a\cos\varphi\sin\theta \\ z = a\sin\varphi \end{cases}$$

donde *a* es el radio de la Tierra. La latitud se determinaba por la inclinación o posición de las estrellas, principalmente con respecto a la estrella polar. Uno de los mejores instrumentos para determinar la latitud fue el sextante, inventado por Newton en el año 1700. La longitud fue sin embargo mucho más difícil de determinar, ya que la posición de longitud depende del huso horario donde se esté situado sobre la Tierra y para ello se necesita el reloj. El problema de la longitud fue objeto de numerosos premios y recompensas por parte de los gobiernos europeos, sin embargo debido a las dificultades para la construcción eficiente de relojes no se tuvo una buena determinación de la longitud hasta el s. XVIII.

Un tema interesante de las Matemáticas relacionado con este hecho es el estudio de C. Huygens (1629-1695) sobre los péndulos cicloidales y donde introdujo los conceptos de involuta y evoluta. En un péndulo cicloidal, el período de oscilación es independiente de la amplitud, debido a que la involuta de una cicloide resulta ser otra cicloide. Huygens usó admirablemente la ya por entonces controvertida cicloide, que se ha conocido luego como la *Helena de la Geometría* o también como la *Manzana de la discordia* por las numerosas peleas que ha originado.

Ya desde el s. XIII se utilizaba la brújula como instrumento de navegación. Se pensaba que para ir desde un punto a otro de la superficie terrestre por la línea más corta posible se podía hacer manteniendo la proa del barco con un rumbo constante con respecto a la dirección que marca la brújula. El portugués Pedro Núñez (1502-1578) fue el primero en demostrar que esto era falso en su *Tratado da sphera* de 1537. Observó que la luego llamada navegación loxodrómica, esto es navegar siguiendo la trayectoria de una línea de rumbo constante, o dicho de otra manera que corta los meridianos por un ángulo constante, no era lo mismo que la navegación ortodrómica, que es la que une dos puntos por el camino más corto posible. De hecho la línea más corta entre dos puntos sobre la superficie terrestre es lo que se llama geodésica y es el círculo máximo que pasa por los dos puntos, círculo obtenido como la intersección de la esfera terrestre con un plano que pase por los citados dos puntos y el centro de la esfera. En cambio la loxodroma, esto es, la curva que corta con un mismo ángulo constante a todos los meridianos, es en realidad una espiral que se va enrollando indefinidamente hacia los polos.

Pedro Núñez estudió en la Universidad de Salamanca donde se casó en 1523 con Giomar de Arias, la hija de Pedro Fernández de Arias. Hizo notables contribuciones a la ciencia y a la navegación y trabajó como cosmógrafo para el rey de Portugal y como profesor de Matemáticas en la Universidad de Coimbra. Uno de sus más famosos textos es el *Libro de Álgebra* que publicó en español y fue por mucho tiempo uno de los mejores tratados de álgebra de la época. Escribió algunos trabajos de astronomía en latín y fue conocido también como poeta.

El problema principal de la cartografía es representar un pedazo de superficie de la esfera terrestre en un mapa plano. Es un hecho matemático que no se puede representar fielmente una parte esférica en un plano de tal manera que se preserven todas sus propiedades geométricas. Más precisamente es un Teorema lo siguiente: No puede haber una correspondencia uno-uno entre una porción de esfera y una porción de plano que conserve a la vez ángulos, áreas y distancias.

Para entender como se puede construir un mapa imaginemos la superficie del globo terrestre como una esfera a la que enrollamos un pedazo de papel plano de tal manera que quede un cilindro tangente a la esfera a lo largo del ecuador. El eje del cilindro cortará la esfera en dos puntos, los polos Norte y Sur respectivamente. Si O es el centro de la esfera y P un punto arbitrario sobre ella, el trozo de recta que empieza por O y pasa P cortará al cilindro en un sólo punto P' que será la imagen de P. De esta manera a cada punto de la esfera, excepto los polos Norte y Sur, les correspondeá un solo punto P' sobre el cilindro. Y recíprocamente, dado cualquier punto P' sobre el cilindro le corresponde un único punto P sobre la esfera que se proyecta en él. Esto establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de la esfera, excepto los polos, y los puntos del cilindro. La imagen así obtenida es como la sombra que se proyectaría sobre el cilindro por los rayos de luz si colocáramos una bombilla en O.

Si cortamos ahora el cilindro por una línea paralela a su eje obtendremos un mapa de la superficie terrestre. El ecuador aparece como un línea recta y meridianos igualmente espaciados aparecen como un

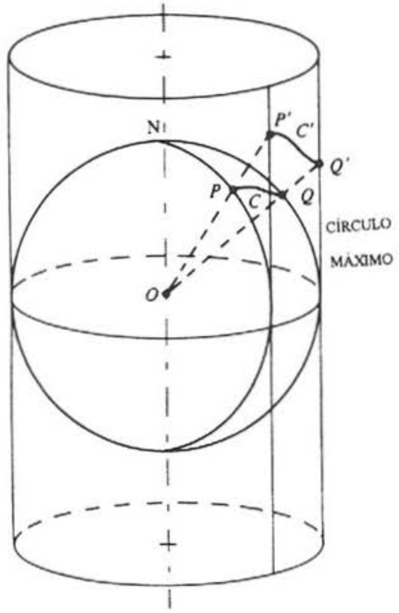


Figura 4

sistema de líneas rectas igualmente espaciadas y perpendiculares al ecuador.

Otra proyección cilíndrica distinta se obtendría por ejemplo si *P'* se obtuviera de *P* de tal manera que la recta que une *P* con *P'* fuera perpendicular al eje de la esfera que une los polos Norte y Sur. En estas proyecciones cilíndricas las regiones cercanas al ecuador se representan con bastante exactitud, pero las regiones más cercanas al polo aparecen más deformadas y más grandes sobre el plano.

Uno de los personajes más importantes y que tuvo gran influencia para la posteridad fue Claudio Ptolomeo de Alejandría. Ptolomeo es conocido por su su *Colección Matemática*, un tratado de trece libros que es como la culminación de todos los conocimientos de la astronomía griega. Contiene una descripción detallada del modelo griego de epiciclos del universo, con parámetros de los movimientos del sol, la luna y las estrellas. Los árabes lo llamaron *Al-magisti*, el más grande, y desde entonces se le conoce como el *Almagesto*.

Referente a lo que aquí nos interesa, Ptolomeo fue el autor del tratado *Geographiae*, una compilación de lugares del mundo conocido junto con sus latitudes y longitudes. Dibujaba los mapas en una red rectangular donde cada grado de latitud tiene la misma distancia que un grado de longitud. Introdujo también la llamada *proyección estereográfica*, que conserva los ángulos y por tanto la forma de las regiones y de las costas. La proyección estereográfica considerada por Ptolomeo se construye del siguiente modo: Dado un punto *P* sobre la esfera terrestre tracemos el segmento de línea recta que une *P* con el polo Sur *S*. Este segmento, corta al plano que pasa por el centro de la esfera y por el ecuador en un único punto *P'*, que es por definición la imagen de *P* por la proyección estereográfica.

Una proyección que conserve ángulos se llama *conforme* y la proyección estereográfica es como el prototipo de aplicación conforme en variable compleja, ya que obtiene el plano complejo como representación conforme de la llamada esfera de Riemann.

Es de destacar que posteriormente durante el s. XIV, fue famosa la escuela de cartografía mallorquina, en especial los judíos Abraham y su hijo Jafuda Cresques, por sus excelentes mapas *portolanos*, donde los distintos puertos están conectados por líneas rectas, líneas que son el rumbo que marca la brújula.

En un área relativamente pequeña del globo terrestre como pueda ser el mar Mediterráneo, estos mapas son más o menos correctos para la navegación. Sin embargo en la época de las grandes exploraciones los errores de navegación debido a la inexactitud a grandes latitudes eran manifiestos. Hacía falta un mapa que fuera fácil de manejar por los navegantes. Esto principalmente significa que las rutas tomadas con una inclinación constante con respecto de la dirección que marca la brújula, esto es las líneas de rumbo o loxodromas, se representen como líneas rectas en el mapa que conecten los puntos de partida y de llegada. La historia de la construcción de este mapa es interesante y fue el origen del descubrimiento de la fórmula de la integral de la secante

$$\int \sec \theta \, d\theta = \ln | \tan (\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) | + c$$

Comprobar esta fórmula es ahora fácil, basta por ejemplo con derivar la parte de la derecha para, después quizás de una sencilla manipulación trigonométrica, comprobar que se obtiene sec θ. El interés de esta historia, tal como describiremos a continuación, radica en que ésta fue descubierta experimentalmente mucho antes del descubrimiento del cálculo diferencial e integral por Newton y Leibniz en la segunda parte del siglo XVII.

El primero que construyó un mapa donde las líneas de rumbo aparecían como rectas fue el cartógrafo holandés Gerardus Mercator (1512-1594), de nombre latino Gerad Kremer, que publicó el famoso y para nosotros ahora familiar mapa mundi en 1569 *Nova et aucta orbis terrae descriptio.*

En el caso de la proyección de Mercator, se requiere que las líneas que forman ángulo constante con los meridianos aparezcan como rectas en el mapa. Por lo tanto las imágenes de tales meridianos tienen que ser rectas paralelas en el plano y si queremos que el mapa conserve ángulos, las imágenes de los paralelos sobre la esfera tendrán que ser rectas paralelas y perpendiculares a las anteriores.

En la figura siguiente, que representa un pedazo de la esfera, AB es el ecuador, C es el centro de la Tierra y T el polo Norte. El paralelo de latitud θ es una circunferencia con centro en P que incluye el arco MN entre los meridianos AT y BT. Entonces BC y NP son paralelos y los «triángulos» ABC y MNP son semejantes, por tanto

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{NC}{NP} = \sec \theta$$

De donde

$$AB = MN \sec \theta$$

Si ponemos AB sobre el mapa y queremos que la imagen de MN tenga la misma longitud, entonces debemos estirar MN por el factor sec θ. Para que el mapa conserve ángulos debemos estirar por igual no sólo horizontalmente sino también verticalmente por sec θ. Sin embargo la corrección es distinta para cada latitud θ y por tanto si $D(\theta)$ es la distacia al ecuador de un punto sobre el paralelo de longitud θ, el pequeño incremento vertical infinitesimal dD con que debemos aumentar el correspondiente incremento $d\theta$ de θ es

$$dD = \sec\theta \, d\theta$$

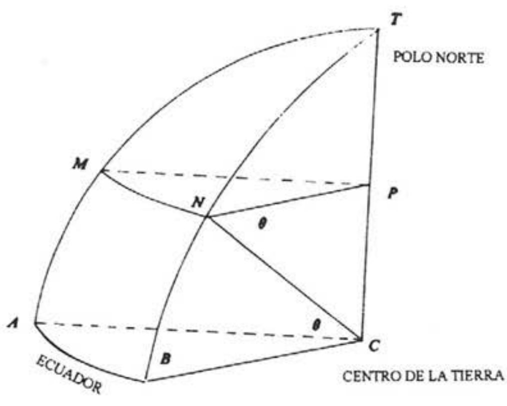


Figura 5

Por tanto la distancia sobre el mapa desde el ecuador al paralelo de latitud θ debe ser

$$D(\theta) \int_0^{\theta} \sec \theta \, d\, \theta$$

Más o menos siguiendo estas ideas, pero sin la precisión matemática y tanteando empíricamente, Mercator construyó el mapa que ahora lleva su nombre.

Posteriormente en 1599 el inglés Edward Wright (1561-1615) publica *Certaine Errors in Navigation ... Detected and Corrected*, donde da la descripción matemática que hemos expuesto anteriormente, aunque con un lenguaje distinto ya que todavía no se había descubierto el cálculo integral. Wright describe como calcular $D(\theta)$ como una *perpetua adición de secantes*:

> the parts of the meridian at eurery poynt of latitude must needs increase with the same proportion wherewith the Secantes or hypotenusae of the arke, intercepted betweene those pointes of latitude and the aequinoctiall [equator] do increase. ... For ... by perpetuall addition of the Secantes answerable to the latitudes of each point or parallel vnto the summe compounded of all former secantes, ... we may take a table which shall shew the sections and points of latitude in the meridians of the nautical planisphaere: by which sections, the parallels are to be drawne.

Como se ve Wright da un método para calcular la integral de la secante $D(\theta)$ como una especie de suma de Riemann y publicó una tabla para latitudes por debajo de 75°. Wright no sólo dio este método para construir e interpretar con precisión el mapa de Mercator sino que encontró un sencillo modelo físico. Consideremos el cilindro tangente a la esfera terrestre por el ecuador e imaginemos la esfera como si fuera un globo inflable. Al ir llenando el globo de aire, identifiquemos los puntos sobre la Tierra con los puntos sobre el cilindro que entran en contacto. De esta forma se va estirando de la misma forma tanto en horizontal como en vertical. Si finalmente desenrollamos el cilindro, nos encontramos con el mapa de Mercator.

Los logaritmos fueron inventados por John Napier (1550-1617) en 1614. En su primera aparición fueron unas tablas por medio de las cuales se podían sustituir multiplicaciones por sumas, utilizando el hecho de que el logaritmo de un producto es la suma de logaritmos. Esto simplificaba enormemente y reducía el error de los largos cálculos trigonométricos entonces usados es astronomía. A partir de entonces fueron apareciendo numerosas tablas de logaritmos de funciones trigonométricas. En 1640, Henry Bond (1600-1678), un profesor de Matemáticas y navegación, observó accidentalmente la extraordinaria analogía entre los valores de las tablas de la integral de la secante $D(\theta)$ con los valores de los logaritmos neperianos de tangentes y conjeturó en 1645 que

$$D(\theta) = \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|$$

La conjetura fue ampliamente conocida y su demostración constituyó uno de los más importantes retos al mundo matemático de mitad del siglo diecisiete. La relación fue finalmente probada por James Gregory (1638-1675) en 1668. Otras pruebas posteriores fueron debidas a Isaac Barrow (1630-1677) en 1670, John Wallis (1616-1703) dio una solución usando series en 1685 y Edmond Halley (1656-1742) simplificó el problema en 1695, demostrando primero que la imagen de una loxodroma por la proyección estereográfica es una espiral logarítmica y usando luego un argumento de series. Halley es conocido por el famoso cometa que lleva su nombre. Habiendo éste aparecido en 1531, 1607 y 1682, Halley predijo correctamente que volvería a aparecer en 1758. Es conocido también por haber publicado los *Principia* de Newton, donde entre otras cosas se dio a conocer la ley de la gravitación universal.

Es también interesante observar que Thomas Harriot (1560-1621) dio con la solución del problema matemático de Mercator mucho antes entre 1580 y 1590. Sin embargo sus trabajos referentes a este tema no fueron publicados y se han hallado en el año 1953 entre sus papeles manuscritos, que forman unos ocho volúmenes y se encuentran depositados en el Museo Británico. En sus argumentos prueba también que la imagen de la loxodroma por la proyección estereográfica es una espiral logarítmica y luego con un argumento geométrico muy original halló su longitud, siendo esta la primera vez en la historia que se halla la longitud de una curva.

Harriot trabajaba como asesor científico y naval y se le considera como el fundador de la escuela inglesa de algebristas. Su trabajo más conocido es *Artis analyticae praxis*, donde trata de las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, relaciones entre coeficientes y raíces, etc. Fue publicado unos diez años después de su muerte. Harriot formó parte en 1585 de una expedición para explorar y hacer mapas del Nuevo Mundo en la entonces llamada Virginia, ahora North Carolina, en los Estados Unidos. Su muerte fue debida a una úlcera cancerosa en su tabique nasal izquierdo, provocada por la inhalación de tabaco, hábito que aprendió de los Indios en su viaje. Es por ello quizás también la primera muerte que se ha registrado en la historia por el hecho de fumar.

Como todavía no se conocían los logaritmos, la espiral logarítmica se llamaba entonces la espiral equiangular, ya que estaba caracterizada por la propiedad de que los radios vectores ρ cortan la curva por un ángulo constante ϕ. Aparece por primera vez en una carta de Descartes a Mersenne en 1638. Fue ampliamente estudiada por Jakob Bernoulli (1654-1705), quién escribió su ecuación en coordenadas polares (r, θ) como

$$\ln r = a\,\theta$$

de donde el nombre de la curva. Actualmente se suele escribir en su forma equivalente $r = e^{k\theta}$. La espiral tiene numerosas propiedades interesantes, y es invariante bajo un gran variedad de transformaciones. Jakob Bernoulli estaba tan entusiasmado con la curva que la mandó inscribir en su tumba junto con la inscripción *Eadem mutata resurgo* («Aunque cambiada, siempre resurgiré la misma»).

Para terminar este artículo vamos a exponer el argumento de Harriot para calcular la longitud y el área de la espiral logarítmica. No teniendo los recursos del cálculo Harriot utilizó una ingeniosa idea geométrica junto con un argumento de paso al límite.

Su construcción está ilustrada en la figura. Consideremos por ejemplo la espiral de ángulo $\phi = 55°$ que esté aproximada por una poligonal $s_1, s_2, s_3, \ldots$ adaptada a la espiral. Al conectar los vértices de esta poligonal con el origen P obtenemos una sucesión de triángulos $T_1, T_2, T_3, \ldots$ que pueden reagruparse hasta formar el triángulo isósceles de base a y ángulos base de 55°, ABT, cuya área es por tanto igual al área encerrada por la espiral. Además

$$BT + AT = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$$

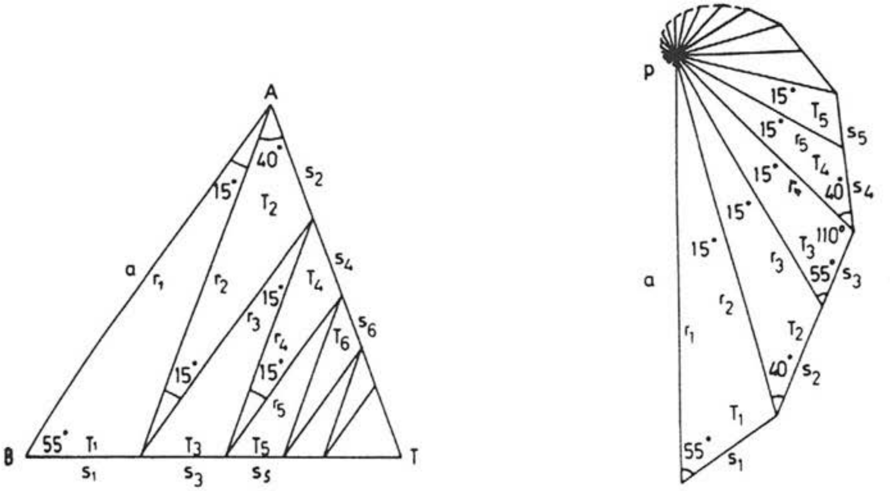


Figura 7

es igual a la longitud de la espiral. Lo curioso es que si hacemos aproximación a la espiral por una poligonal de segmentos más cortos s'_1, s'_2, s'_3, ... y repetimos el proceso entonces obtenemos el mismo triángulo *ABT*. Luego la longitud y el área encerradas por la nueva poligonal sigue siendo la misma. Como la poligonal tiende hacia la espiral logarítmica al hacer los segmentos cada vez más pequeños resulta por tanto que la longitud de esta espiral es *BT+AT* y que el área que encierra es la del triángulo *ABT*.

REFERENCIAS

BOYER, Carl (1968). *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons (hay una traducción en Alianza Universidad).

CAJORI, Florian (1915). On an integration antedating the integral calculus. *Bibliotheca Mathematica*, 3rd series, 14, 312-319.

CALINGER, Ronald (1996). *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*. The Mathematical Association of America, MAA Notes nº 40.

CARSLAW, H.S. (1924). The story of Mercator's map. *The Mathematical Gazette*, Vol. XII, 168, 1-7.

CRONE, G.R. (1978). *Maps and Their Makers*, 5th edition. Folkestone, Kent, England: Wm. Dawson and Sons, Ltd.

FISHER, I. (1965). How far is from here to there ? *The Mathematics Teacher*, 123-130.

GILLISPIE, C.C. ed. (1970-1980). *The Dictionnary of Scientific Biography*. New York: Charles Scribner's Sons.

KATZ, Victor J. (1993). *A History of Mathematics: an Introduction*. Harper and Collins College Publishers.

KLINE, Morris (1973). *El fracaso de la Matemática Moderna*. Madrid: Siglo XXI de Editores S.A.

LARSEN, H.D. (1952). Club Topics. *American Mathematical Monthly*, 59, 475-478.

NIEVERGELT, Y. (1996). Differentials and geographical maps in multivariable calculus and complex analysis. *UMAP Modules in Undergraduate Mathematics and Its Applications*, 17, 1, 25-70.

NORD, John (1996). Mercator's Rhumb Lines: A Multivariable Application of Arc Length. *Mathematics Magazine*, 27, 5, 384-387.

PEPPER, J.V. (1967). Harriot's calculation of the meridional parts as logarithmic tangents. *Archive for History of Exact Science*, 4, 359-413.

RESNIKOFF, H.L.; WELLS, R.O. (1984). *Mathematics in Civilization*. New York: Dover Publications Inc.

RICKEY, V.F. (1992). How Columbus Encountered America. *Mathematics Magazine*, 65, 4, 219-225.

RICKEY, V.F.; TUCHINSKY, P. (1980). An Application of Geography to Mathematics: History of the Integral of the Secant. *Mathematics Magazine*, 53, 3, 162-166.

SACHS, J.M. (1987). A Curious Mixture of Maps, Dates, and Names. *Mathematics Magazine*, 60, 3, 151-158.

STILLWELL, John (1989). *Mathematics and Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag.

WRIGHT, Edward (1599). *Certaine Errors in Navigation, Arising either of the ordinaire erroneous making or using of the sea Chart, Compasse, Crosse staffe, and Tables of declination of the Sunne, and fixed Starres detected and corrected*. London: Valentine Sims.

Resumen

Las matemáticas ocupan un lugar principal en la escuela. Las matemáticas tienen esta importancia por formar una parte de nuestra cultura y por ser además una de las pocas asignaturas que hacen pensar al estudiante. Siguiendo este objetivo y para hacer nuestras clases más amenas e interesantes proponemos usar temas e ideas provenientes de la Historia de las Matemáticas. Se expone como ejemplo el desarrollo histórico de la cartografía y de la navegación.

Palabras clave: planes de estudio, problemas clásicos, medida de la Tierra, mapas, proyección de Mercator, espiral logarítmica.

Abstract

Mathematics play an important role at school. Mathematics have this relevance because they are part of our culture and also because they are one of the few subjects that force our students to think. Accadingto this objetive and in order to make our clases more enjoyable and interesting we propose to use themes and ideas coming from the History of Mathematics. As an example we expose the historical development of cartography and navigation.

Key words: course programs, classical problems, measurament of the Earth, maps, Mercator's projection, logarithmic spiral.

Bartolomé Barceló

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de Madrid

28049 MADRID

Resolución de ecuaciones, unificación, automatización del conocimiento y matemática educativa

Luis Carlos Cachafeiro

1. Introducción

LOS cambios producidos en nuestra sociedad a partir de las investigaciones en la Teoría del Conocimiento e Inteligencia Artificial tienen una amplia repercusión en la vida diaria de las personas y, a consecuencia de ello, en el propio currículum educativo, siendo las Matemáticas una de las materias más condicionadas a adaptarse a las diferentes necesidades y medios que dichos cambios producen.

Muchos de los resultados matemáticos clásicos, algunos de los cuales aparecen explícitamente en los actuales curricula de Secundaria y Bachillerato, tienen repercusiones destacadas en los avances en Inteligencia Artificial. Por ello esta disciplina no puede considerarse ajena a las programaciones actuales de las asignaturas de Matemáticas. En este artículo, observaremos la estrecha relación existente entre la resolución de ecuaciones y la unificación, operación esta que surge de las investigaciones realizadas en el campo de la prueba automática y que es utilizada directa o indirectamente en buena parte de las investigaciones en Inteligencia Artificial.

La finalidad última de la Inteligencia Artificial (IA) es la de producir programas y máquinas que realicen procesos auténticamente inteligentes. Las primeras investigaciones en IA surgen en los años 50 y sufrieron una aparente parada tras comprobar que esos primeros experimentos (e.g. programas que imitaban una conversación, iniciales probadores de teoremas, máquinas capaces de aprender si bien de una forma muy primitiva) distaban mucho de ser inteligentes. Esas investigaciones ignoraban muchos de los problemas reales de cualquier actividad inteligente y que suelen ser muchísimo más complejos que los procesos simples de deducción formal. De esta forma quedó probado que, por una parte, los humanos desconocíamos el funcionamiento de nuestra propia inteligencia y que por otra parte aunque se conociera ese funcionamiento, podría ser muy difícil de imitar mediante máquinas tanto por la enorme cantidad de información que se debe emplear como por hallarse organizada de forma muy compleja. Los enormes esfuerzos dedicados desde entonces a estas investigaciones, ya han producido avances notorios en muchos campos del conocimiento como en el proceso de imágenes, prueba automática, procesamiento del lenguaje natural, traducción automática entre otros (Graubard 1993).

En una aplicación inteligente puede suponerse la existencia de una base de conocimientos que contiene los datos disponibles (concretos o flexibles) y

tarbiya, nº 15. 1997. Págs. 79-88

Tabla 1

ALGUNOS TIPOS DE DATOS EN IA

Tipos de datos	Ejemplos
TÉRMINOS Expresiones básicas de la información	*f(x,g(a,y))* *Persona(N(Pepe),Edad(x),Altura(173))*
SUSTITUCIONES Adjudican valores a las variables	$z \leftarrow g(a)$ $x \leftarrow 32$ *años*
CLÁUSULAS Relacionan literales y permiten expresar datos y reglas	X es el hijo de Y si Y es el padre de X *Hijo (X,Y)* $\Leftarrow$ *Padre (Y,X)*
EXPRESIONES EN GRAMÁTICAS DE UNIFICACIÓN Construcciones jerarquizadas e interdependientes de ciertas estructuras sobre otras.	$\left[\begin{array}{ll} x_0 & \left[\begin{array}{ll}\text{categoría:} & \text{Frase}\\ \text{contenido:} & (1)\end{array}\right] \\ & \left[\begin{array}{ll}\text{categoría:} & \text{Nombre}\\ \text{contenido:} & (2)\end{array}\right] \\ x_1 & \\ x_2 & \left[\begin{array}{ll}\text{categoría:} & \text{Verbo}\\ \text{contenido: (1)} & \left[\begin{array}{l}\text{número: (2)}\\ \text{sujeto: (3)}\\ \text{modo declarativo}\end{array}\right]\end{array}\right]\end{array}\right]$

de un sistema de inferencia que es el que permite obtener nuevos resultados a partir de los previos. Podemos suponer que una parte de los datos expresan nuestra experiencia previa mientras que otra parte corresponde a la descripción de una situación actual que se desea transformar de una forma inteligente o idónea. También se precisa un método de aprendizaje que permitirá incorporar como nuevos conocimientos los resultados de anteriores cálculos o experimentaciones. Uno de los mayores problemas es disponer de estructuras de datos apropiadas para conservar, mantener y utilizar apropiadamente la información. En la tabla 1 pueden observarse algunos de los datos empleados en IA. Las expresiones en gramáticas de unificación se emplean especialmente en los campos de procesamiento del lenguaje natural y traducción automática (Knight 1989).

Los sistemas de inferencia permiten, a partir de

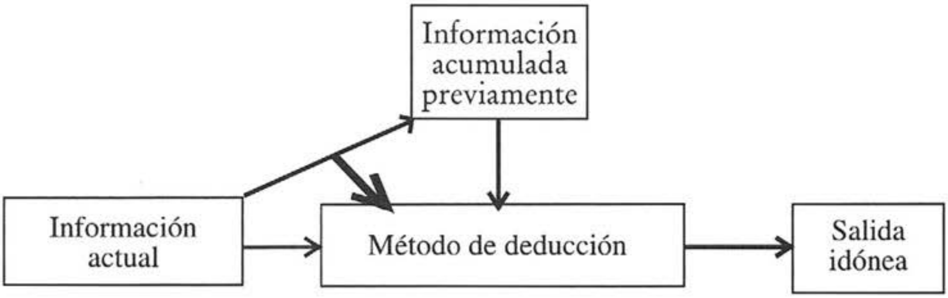


Figura 1
ACTUACIÓN DE UN MECANISMO INTELIGENTE

una información acerca del estado actual de un sistema dado, proporcionar una salida adaptada a ese estado. Esta salida dependerá tanto de la información disponible como del método de inferencia empleado. Para proporcionar respuestas idóneas, es primordial poder obtener nuevas informaciones a partir de los elementos ya conocidos. En Computación, una operación esencial para ello es la unificación.

2. Unificación de Términos

Esta operación permite contrastar dos informaciones flexibles (e.g. que incluyen variables) para obtener nuevos datos y adjudicar valores a las variables. Formalmente, si s y t son dos expresiones, la sustitución σ es unificador de s y de t si $\sigma(s) = \sigma(t)$.

Podemos clarificar el significado de esta operación y su cálculo con el siguiente ejemplo simplificado:

Ejemplo 1

Supongamos que a dos criptógrafos se les suministra un determinado texto para descifrar. Cada uno de ellos, independientemente, consigue conocer una parte del texto, por lo que colocan variables subindicadas para señalar palabras no descifradas. Concretamente el primero escribe:

Cada	x_2	*tiene su*	*propia*	*cadena*	*privada de*	x_9	*y de*
x_{12}	*de*	x_{14}	*que son*	*inaccesibles*	*para el otro*	x_{21}.	*Cada*
x_{23}	*desconectado*	*parece*	*tener una*	x_{28}	x_{29}	*separada.*	

El segundo obtiene el siguiente texto:

x_1	x_2	*tiene su*	*propia*	x_6	*privada de*	*recuerdos*	*y de*
experiencias	*de*	*aprendizaje*	*que son*	*inaccesibles*	*para el otro*	x_2.	*Cada*
x_2	x_{24}	*parece*	*tener una*	*«mente*	*propia»*	*separada.*	

De esta forma, al contrastar ambos textos surgen nuevos datos que no eran expresamente conocidos por ninguno de los dos criptógrafos. Los valores que son inmediatamente adjudicados son los siguientes:

$x_1 \leftarrow$ *Cada*	$x_{12} \leftarrow$ *experiencias*	$x_{24} \leftarrow$ *desconectado*	
$x_6 \leftarrow$ *cadena*	$x_{14} \leftarrow$ *aprendizaje*	$x_{28} \leftarrow$ *«mente*	
$x_9 \leftarrow$ *recuerdos*	$x_{21} \leftarrow x_2$	$x_{23} \leftarrow x_2$	$x_{29} \leftarrow$ *propia»*

quedando libre x_2. Por lo tanto cualquier asociación que se realice a mayores para x_2^+ proporciona un texto «correcto» en el sentido de que es posible que se trate del original. Pero, por otra parte las anteriores asociaciones son las mínimas posibles y, ciertamente, las únicas «seguras». Así, haciendo $x_2 \leftarrow$ *individuo* se proporciona una adjudicación de valores correcta, dado que coinciden los dos textos, pero innecesaria ya que es información extra que se introduce y que no se encuentra realmente presente[1].

Ejemplo 2

La unificación de $f(x, x, a)$ con $f(y, b, y)$ resulta en fallo por el conflicto de los símbolos a y b.

La unificación de $f(x, g(x))$ con $f(y, y)$ resulta también en fallo pero en este caso porque la variable y no puede reemplazarse simultáneamente por x y por $g(x)$. En este último caso, si bien x y $g(x)$ no pueden igualarse, la sustitución $x \leftarrow g(x)$ es admitida en PROLOG como unificador porque permite expresar soluciones recursivas[2].

La unificación permite detectar si una información actual puede contrastarse favorablemente con alguno de los datos que corresponden a experiencias previas. Es el prototipo de operación de contraste porque permite el intercambio de datos entre las dos fuentes de información a contrastar. La unificación es utilizada expresamente en la demostración automática de teoremas y en la programación declarativa, e indirectamente en todos los sistemas de IA que hacen uso de la programación lógica. Existen otras formas de contraste como el *matching* y *pattern-matching* que pueden verse como formas particulares de unificación. Una sustitución s es un matching de s y de t si σ sólo actúa sobre s, σ verifica $\sigma(s) = t = \sigma(t)$ y por lo tanto σ también es unificador de s y t.

Una forma «natural» de contraste puede verse en el reconocimiento auditivo de palabras. En este reconocimiento la audición aparece como el resultado de un proceso: las células del oido interno hacen llegar al cerebro una secuencia de impulsos eléctricos que reproducen las características del sonido recibido. En el cerebro se produce un contraste de esta información, relativamente pobre (i.e. poco estructurada), con los modelos previos de sílabas o palabras, modelos que son necesariamente flexibles (pues en otro caso sólo se reconecería la expresión o habla de una persona concreta). Como consecuencia de este contraste se produce la adjudicación de valores (e.g. sílabas, palabras o frases cortas) que proporciona la compresión sensorial del sonido recibido. Dada la velocidad con que se realiza este proceso, generalmente esta última fase no llega a ser detectada, haciéndonos creer que ni siquiera existe y que la percepción es totalmente automática (Johnson-Laird, 1990).

Aunque la unificación fue definida y empleada

---

1 La adjudicación original de la que procede el texto es $x_2 \leftarrow$ *hemisferio* y este texto se encuentra en e (Johnson Laird 90).

2 El término resultante de la unificación es un término $f(g(g(\ldots g(x), g(g(\ldots g(x)))))$ con un número infinito (numerable) de símbolos g en cada argumento.

explícitamente por el lógico J. A. Robinson (1964) en el campo de la prueba automática de teoremas, sorprendentemente no fue hasta primeros de los años 80 cuando se relacionó explícitamente esta operación con la transformación de ecuaciones. Martelli y Montanari (1982) buscando una forma de acelerar la unificación dieron una serie de reglas de transformación que transformaban el problema inicial hasta obtener el resultado, dado como: *Fallo, Forma resuelta* o *Forma factorizada*. En la forma factorizada o triangular las incógnitas no se encuentran totalmente despejadas lo que permite reducir en gran medida el coste de la unificación.

Se pueden observar muchas semejanzas entre la forma de realizar la unificación de Martelli y Montanari y el método de Gauss de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En ambos casos se parte de un sistema de ecuaciones que debe transformarse mediante ciertas reglas, incluyendo las de Borrado y Fallo y finaliza bien cuando se obtiene una forma resuelta (en cada ecuación aparece una variable despejada y su valor correspondiente) o una forma triangular (en cada ecuación aparece una variable despejada y una expresión que puede tener variables despejadas en otras ecuaciones).

En la tabla 2 se muestran una serie de ejemplos comparativos entre el método de Gauss de resolución de ecuaciones lineales y el método de Martelli y Montanari de unificación de términos.

3. Unificación Ecuacional

Como se mostró previamente, para que los términos s y t sean unificados por σ se precisa la igualdad de todos los símbolos de $\sigma(s)$ y de $\sigma(t)$. Esta forma «dura» de igualdad se conoce como igualdad sintáctica y exige que s y t se encuentren dados de una misma forma o notación.

Sin embargo nuestro concepto de igualdad no es generalmente tan estricto. Así, un mismo significado puede expresarse mediante dos frases completamente diferentes (e.g. «*Pedro es mayor que Juan*» o también «*Juan es menor que Pedro*»). Esta forma de igualdad en la que unas expresiones pueden ser

Tabla 2

EJEMPLOS COMPARATIVOS DE UNIFICACIÓN Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

	Transformación de sistemas	Forma resuelta	Forma triangular
Ejemplo Martelli y Montanari	$f(x,a)=f(b,y) \Rightarrow \begin{cases} x=b \\ a=y \end{cases}$	$\begin{cases} x=a \\ y=f(z) \end{cases}$	$\begin{cases} x=f(y,a) \\ y=g(z,b) \end{cases}$
Ejemplo Gaus	$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ 2y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=5 \\ y=1 \end{cases}$ ó $\begin{cases} x=5-y \\ y=1 \end{cases}$

iguales a otras sin que sean necesariamente coincidentes, se conoce como igualdad ecuacional o igualdad semántica y se expresa como $=_E$ o simplemente como =. En el lenguaje matemático se utiliza la igualdad ecuacional en todos los campos de la matemática inclusive en la matemática escolar. Así, cuando se trabaja con las expresiones 2/3 y 4/6 se utiliza la igualdad ecuacional siendo ambas representaciones diferentes del número [2/3]. En la aritmética, todo número tiene una representación más simple llamada forma normal (en el caso anterior ésta es 2/3). Pero éste no es el caso del álgebra, donde $x+3$ no es más simple que $3 + x$.

Sean s y t dos expresiones. Si una sustitución σ iguala semánticamente estas expresiones [i.e. $\sigma(s) =_E \sigma(t)$] se dirá que σ es un unificador ecuacional de s y t y que éstos términos son unificados ecuacionalmente por σ. La unificación ecuacional de los términos s y t en la teoría E, puede interpretarse como la resolución de la ecuación $s = t$ en esta teoría, ya que se trata de obtener los valores de las variables que permiten construir una igualdad $\sigma(s) =_E \sigma(t)$.

Ejemplo 3

Se supone que para cualquier valor de u y de v, se verifica la igualdad $f(u, u, v) = f(v, u, v)$.

En estas condiciones, la unificación ecuacional de los términos $f(x, x, a)$ y $f(y, b, y)$ no resulta en fallo, puesto que la sustitución que lleva $y \leftarrow a$ y $x \leftarrow b$ es un unificador ecuacional, ya que proporciona las expresiones $f(b, b, a)$ y $f(a, b, a)$ que son iguales en la teoría considerada.

La unificación ecuacional es mucho más potente que la unificación pero también es mucho más compleja ya que ahora dos objetos iguales pueden diferir mucho a nivel de símbolos, y dependerá de la propia teoría que un problema dado se pueda resolver o no de una forma simple, o que ni siquiera existan métodos eficientes de resolución (Siekman, 1989, Cachafeiro, 1994). Los conocimientos matemáticos previos suelen proporcionar información muy relevante acerca de las propiedades de la teoría a considerar. Así, las posibilidades de transformar una expresión polinómica en otra equivalente es muy diferente si se considera en Z, en *Q*, en *R* o en *C* (e.g. en Z no existe ningún valor de x para el que la expresión 3x+2=0 pueda convertirse en una igualdad en esa teoría).

Ejemplo 4

Unificar ecuacionalmente $2x+4$ con $3+x$, esto es, resolver $2x+4 = 3+x$ en las teorías Ø, N y Z.

En la teoría Ø (en la que no hay ecuaciones diferentes de la identidad sintáctica), no existen valores de la variable que conviertan esa expresión en una identidad y el problema no tiene solución. En N el problema $2x+4 = 3+x$ tampoco tiene solución. En Z esta ecuación tiene por solución $x = -1$. Esto significa que, al aplicar la sustitución $x \leftarrow -1$ a los términos $2x+4$ y $3+x$ se obtiene $2·(-1)+4$ y $3+(-1)$ que son iguales en Z (representaciones del número 2). Por lo tanto esta sustitución es un unificador ecuacional (en Z) de $2x+4 = 3+x$.

Por ello, la unificación ecuacional es heredera y comparte con la investigación matemática los problemas y resultados concernientes a la resolución algebraica de ecuaciones, que es una de las primeras y últimas fuentes de producción de resultados matemáticos. Como ejemplo de ello se puede mencionar, por una parte, la matemática de la época babilónica y, por otra, al resultado de Matiyasevitch (1970) que demuestra la no decibilidad del 10° Problema de Hilbert.

Por otra parte, muchos métodos actuales de unificación ecuacional utilizan directamente resultados de la resolución de ecuaciones. Como ejemplo de ello se pueden mencionar: el método de Boole de resolución de ecuaciones (Martin y Nipkow 1989), la obtención de bases de soluciones de ecuaciones diofánticas (Boudet *et al.* 1990) y el resultado de Matiyasevitch y su aplicación al estudio de la decibilidad de la unificación ecuacional en otros problemas y teorías (Bockmayr 1987).

Como reconocimiento de que las etapas importantes de la investigación de resolución de ecuaciones también lo son para la Unificación Ecuacional en la tabla 3 se muestran algunas de ellas (Boyer 1986).

La unificación ecuacional aprovecha todos estos resultados conocidos y los extiende a nuevos campos como: la resolución de ecuaciones en teorías que no habían sido estudiadas hasta ahora, la resolución de problemas ecuacionales arbitrarios en una teoría dada o en grupos de teorías muy generales etc. Con este amplio e histórico bagaje y renovados métodos, la unificación ecuacional, que ya es usada explícitamente en algunos sistemas (e.g. demostración automática de teoremas y programación lógica y funcional) será una de las herramientas más importantes para la automatización del conocimiento.

Tabla 3

ALGUNAS ETAPAS RELEVANTES DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Época	BABILONIA II° milenio a.C.	GRECIA siglo V a.C.	DIOFANTO siglo III
Soluciones en	Q+	R+	Z+
Tipo de ecuación	1° y 2° grados	1° y 2° grados	1° y 2° grados
Generó	El número racional	El número real	Interés por la aritmética
Época	SCIPIONE del FERRO siglo XVI	ABEL siglo XIX	MATIYASEVITCH 1976
Soluciones en	R	R	Z
Tipo de ecuación	3° grado	grado n>4	polinómica de grado arbitrario
Generó	El número complejo	El álgebra moderna	?

4. Implicaciones en el currículum y conclusiones

Las investigaciones en unificación ecuacional concretamente y en teoría del conocimiento e IA en general, modificarán en uno u otro sentido el currículum actual de las Matemáticas en todos los niveles educativos y de otras disciplinas. Se pueden considerar algunas direcciones como las más probables de ser influidas por estas investigaciones:

— El análisis del papel histórico, evolución y rol actual de los conocimientos matemáticos. Este análisis es útil tanto en la matemáticas como en otras materias (e.g. filosofía, historia de la ciencia, ética). Permitirá comprender mejor el significado de la resolución de ecuaciones como antesala de nuevos conceptos e ideas acerca del conocimiento.

— La incorporación de nuevas teorías y problemas de resolución ecuacional (e.g. teorías con un operador conmutativo). Ello puede aparecer combinado con nuevos métodos de resolución de ecuaciones y el uso de soporte visual e informático para la corrección y la autocorrección.

— El estudio general de los métodos de transformación de sistemas en una visión integrada de todo un proceso. Esto incluye tanto la simplificación de expresiones numéricas o algebraicas, como inecuaciones, derivadas etc. Esta integración permite clarificar el tipo de operación e incidir más en las diferencias de unos y otros sistemas.

Para concluir incidimos en el significado de la unificación y de la unificación ecuacional como herramientas claves para realizar el contraste de datos, operación ésta que se encuentra en prácticamente todos los desarrollos de la Inteligencia Artificial. Asimismo destacamos la intensa relación entre estas operaciones y la resolución de ecuaciones. Para la unificación mostramos cómo el mecanismo de Martelli y Montanari tiene muchos puntos en común con el método de Gauss de resolución de ecuaciones. La relación entre la unificación ecuacional y la resolución de ecuaciones es aún mucho más profunda, ya que en ambos casos se persigue resolver un problema ecuacional en una teoría dada. Por ello, las investigaciones en unificación ecuacional pueden verse como una continuación de las ya realizadas en la resolución de ecuaciones, que ha sido uno de los campos más fructíferos de las Matemáticas. Se mencionaron también algunas partes del currículum que pueden verse en poco tiempo ampliadas o modificadas como consecuencia directa o indirecta de las investigaciones en el campo de la unificación.

BIBLIOGRAFÍA

BOCKMAYR (1987). A Note on a Canonical Theory with Undecidable Unification and Matching Problem. *Journal of Automateed Reasoning 3*, 379-381.

BOUDET, A., CONTEJEAN, E., DEVIE, H. (1990). A new AC unification algrithm with a new algorithm for solving diophantique equations. *IEEE Symposium on Logic in Computer Science* 289-299.

BOYER, C. B. (1986). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

CACHAFEIRO CHAMOSA, L.C. (1994). *Algoritmos Xerales de Unificación Ecuacional.* Tese Dotoral. Universidad de A Coruña. Abril 1994.

GRAUBARD, S. R. (comp.) (1993). *El Nuevo Debate sobre la Inteligencia Artificial. Sistemas simbólicos y redes neuronales.* Barcelona: Editorial Gedisa.

JOHNSON-LAIRD, P.N. (1990). *El ordenador y la mente. Introducción a la ciencia cognitiva.* Barcelona: Editorial Paidós.

KNIGHT, K. (1989). Unification: A Multidisciplinary Survey. *ACM Computing Surveys 21,* 92-124.

MATIJASEVIC Y. (1970). Diophanine representation of recursively enumerable predicates. *Actes Congr\ès International des Mathématiciens 1,* 235-238.

ROBINSON, J.A. (1965). A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle. *Journal of Association Computing Machinery (JACM),* 12, 32-41.

MARTELLI, A., MONTANARI, U. (1982). An efficient unification algorithm. *Transaction on Programming Languages and Systems,* 4(2), 258-282.

MARTIN, U., NIPKOW, T. (1989). Boolean Unification — The Story So Far. *Journal of Symbolic Computation* 7, 275-293.

SIEKMAN, J. (1989). Unification Theory : a Survey. *Journal of Symbolic Computation*, 7, 207-274.

Resumen

En este trabajo se describen las operaciones de unificación y de unificación ecuacional, justificando su importancia como operaciones fundamentales en el campo de la automatización del conocimiento. Se muestra la estrecha relación de ambas con la resolución de ecuaciones y se consideran las implicaciones que puedan tener en el currículum especialmente en el de las matemáticas.

Palabras clave: inteligencia artificial, resolución de ecuaciones, currículum de matemáticas.

Abstract

In this paper, we describe the unification and equational unification operations justifying their importance as operations in the field of the automatization of knowledge. We show the close relationship of both operations with the equational resolution and we also consider some implications in the curriculum specially in the mathematicas study programmes.

Key words: artificial intelligence, equational resolution, mathematical curriculum.

Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
I.B. Pontepedriña
Amor Ruibal sn Santiago de Compostela
email: cichamos@udc.es

La naturaleza de la probabilidad. Una revisión histórico-epistemológica

César Sáenz Castro

1. Historia y filosofía de la probabilidad

EXISTEN características poco usuales en el desarrollo histórico de la probabilidad en comparación a otras ramas matemáticas tales como la geometría o aritmética. Un enfoque matemático de la probabilidad empezó a surgir hace poco más de tres siglos, mucho después que el hombre tuviera las primeras experiencias con el azar. Un gran número de paradojas acompañó el desarrollo conceptual indicando la disparidad entre intuiciones y enfoques formales. Un hito importante fue abandonar la tarea de formalizar una interpretación específica y concentrarse en estudiar la estructura de la probabilidad. Una fundamentación matemática sólida se estableció por Kolmogorov en 1933 pero no clarificó la naturaleza de la probabilidad. Todavía hoy existen distintos enfoques filosóficos que despiertan controversia.

1.1. Tardía y dual emergencia de la probabilidad

¿Por qué no hubo teoría de probabilidad en Occidente antes de Pascal, en el siglo XVII, a pesar de que en todas las civilizaciones se utilizaban aparatos y juegos de azar? Hacking (1975) describe como «ausente familia de ideas» a este hecho y al analizar las razones de esta ausencia considera insuficientes o irrelevantes cada una de las explicaciones que se han dado, consideradas individualmente:

1) Se ha argumentado que una visión determinista del mundo excluye el pensamiento probabilístico; sin embargo, una conjetura alternativa y mejor es que el pensamiento determinista, causal, es esencial para la formación de los conceptos de azar y probabilidad y por eso el modelo de causación mecánica y el modelo probabilístico emergen en el mismo período histórico, el siglo XVII.

2) Las loterías y los dados constituyen una buena forma de consultar a los dioses directamente, sin sacerdotes intermediarios, pero entonces resulta impío intentar computar lo que los dioses dicen, es decir, el papel de los dados en la adivinación podría excluir investigaciones críticas de las leyes de la aleatoriedad; sin embargo, mucha gente impía y culta era aficionada a los juegos de azar (Hacking pone como ejemplo a Marco Aurelio) y no por eso reflexionaron sobre la aritmética del azar.

3) Para concebir las leyes de la probabilidad necesitamos tecnología del azar, aparatos aleatorios

que permitan generar ejemplos empíricos fácilmente comprensibles; las primeras experiencias aleatorias siempre emplean lo que Neyman (1950, citado en Hacking, 1975) llamó un Conjunto de Probabilidad Fundamental (CPF) de alternativas igualmente probables; sólo después de que el individuo comprenda esta idea puede progresar a conjuntos cuyas alternativas no son equiprobables. Se sugiere que en la edad antigua no existían CPF que nos diesen idea de equiprobabilidad: por ejemplo, los más antiguos de los dados cúbicos conocidos, hallados en tumbas egipcias datadas como anteriores al 2000 a. de C., no proporcionan un conjunto de 6 probabilidades iguales porque no son de tamaño uniforme, ni en el material ni en la forma de numerar sus caras (si bien en muchos de ellos los números de 1 a 6 están dispuestos de forma que las caras opuestas sumen 7, igual que en los dados modernos). Sin embargo, argumenta Hacking, aunque no mucho, existía material aleatorio adecuado, por ejemplo, se conservan dados de marfil muy antiguos en el Museo de Antigüedades del Cairo que están muy bien equilibrados.

4) Hay dos motivos por los que una ciencia se desarrolla: en respuesta a problemas que ella misma crea y en respuesta a problemas que le son propuestos desde fuera, problemas derivados, sobre todo, de necesidades económicas. Pues bien, sólo muy recientemente la teoría de probabilidad ha sido capaz de crear sus propios problemas y generar sus propios programas de investigación; históricamente, el estímulo vino de otras disciplinas: en el S. XVII el establecimiento de los seguros y anualidades impulsaron a la estadística, en el S. XVIII la teoría de la medida se desarrollaba con fuerza sobre todo al servicio de la astronomía, en el S. XIX se creaba la biométrica para análisis de datos biológicos, en el S. XX las necesidades de la agricultura y medicina motivan el desarrollo de la teoría probabilística; con todo, esta explicación economicista no tiene en cuenta que algunas destrezas de cálculo de anualidades ya eran utilizadas en la época romana.

5) La matemática en Occidente no era suficientemente rica en ideas y capacidad de cálculo para generar una matemática del azar; faltaba, sobre todo, un álgebra combinatoria porque hay que esperar a 1666 a que Leibniz publique su *Ars Combinatoria*. Por contra, los indios y árabes que tenían un buen sistema de numeración también desarrollaron antes terminología y cálculos probabilísticos (el término *hazard* es tan árabe como el término álgebra). Desde una perspectiva educativa, conviene subrayar el paralelismo psico-histórico que se desprende del dato de que si las técnicas combinatorias fueron necesarias para la aparición histórica de la probabilidad, Piaget e Inhelder (1951) establecen que es necesario que el niño posea el esquema combinatorio, que forma parte del pensamiento intelectual más avanzado, para que pueda comprender el concepto de probabilidad.

En definitiva y como corolario, Hacking establece que la conjunción de diversos factores tales como «la impiedad», la existencia de aritmética, un diferente concepto de causalidad y el desarrollo comercial, debería conducir a la formación de la matemática de la probabilidad. Como dato confirmatorio encuentra que hace 2000 años la India tenía un avanzado sistema de mercado, tenía un buen sistema de numeración, y tanto su piedad como sus teorías de las causalidad no seguían moldes europeos; pues bien, en esta sociedad se encuentran rastros de una teoría de la probabilidad desconocida en Occidente. Con todo y aunque los dados son uno de los más viejos pasatiempos humanos, el hecho histórico es que no se conocen matemáticas de la aleatoriedad hasta el Renacimiento y que ninguna de las explicaciones de este hecho es concluyente.

De acuerdo a la leyenda, la probabilidad comenzó en 1654 cuando el jansenista Pascal resolvió los dos célebres problemas que le propuso el mundano Caballero de Méré y envió su solución a Fermat (en realidad, los dos problemas llevaban ya algún tiempo en circulación entre los estudiosos de la época). Lo que sí es verdad es que la segunda mitad del S. XVII es el tiempo del nacimiento de la probabilidad: en 1657 Huygens escribió el primer libro de texto sobre la probabilidad que se ha publicado. Por esas fechas Pascal hizo la primera aplicación de razonamiento probabilístico a problemas distintos de los juegos de azar e «inventó» la teoría de la decisión: el pensador francés no duda en apostar por la existencia de Dios, ya que, por pequeña que sea la probabilidad de que ello ocurra, la ganancia es infinita si es que, en efecto, Él existe; por lo que tal juego tiene la propiedad de tener una esperanza positiva. Aunque Pascal estableció estas consideraciones con la intención de predicar la religión, muestran como subproducto algo interesantísimo desde la perspectiva de la matemática: establecen el modo en que la aritmética aleatoria puede ser parte de un arte de razonamiento general y hacen posible comprender que la estructura de pensamiento sobre juegos de azar se puede transferir a una teoría de la inferencia que no está basada en un escenario de azar. En el libro *Logic* de *Port Royal* se mencionan medidas numéricas de algo que hoy día se llama probabilidad. Simultánea pero independientemente, Leibniz pensaba en aplicar una métrica de las probabilidades a problemas legales y en desarrollar la combinatoria. John Graunt publicó en 1662 el primer conjunto extenso de inferencias estadísticas extraídas de los registros de mortalidad.

La probabilidad que se desarrolla en tiempos de Pascal es esencialmente dual: tiene que ver, a la vez, con frecuencias estables a largo plazo y con grados de creencia; es simultáneamente, estadística y epistemológica. La dualidad de la probabilidad está bien ilustrada por los fundadores de la teoría: el problema de Pascal de dividir el dinero de una apuesta cuando hay que interrumpir el juego, es de naturaleza aleatoria; su argumento de decisión sobre la existencia de Dios es de grado de creencia. Huygens escribió sobre todo de problemas aleatorios. El *Logic* finaliza con una discusión sobre el concepto de creencia razonable. ¿A qué necesidad histórica se debió que estas dos familias de ideas fácilmente distinguibles confluyeran en una sola? ¿Cómo se hizo posible este concepto dual de probabilidad?

Hacking (1975) afirma que los filósofos han analizado esta dualidad de la probabilidad desde hace tiempo: Carnap distinguía entre probabilidad inductiva y probabilística; Poisson aprovechaba las palabras *chance y probabilité* para hacer la misma distinción; Condorcet sugirió facilidad para el concepto aleatorio y motivo de creencia para el concepto epistemológico; Russell usó credibilidad para el último.

En el enfoque epistemológico de la probabilidad hay dos escuelas de pensamiento dominantes: 1) en las primeras décadas de este siglo, se prestó mucho interés a la teoría avanzada por Jeffreys (1933), según la cual la probabilidad conferida a una hipótesis por algún tipo de evidencia es una relación lógica entre dos proposiciones: la probabilidad de h a la luz de e es el grado en el que e implica lógicamente a h; 2) por otro lado está la teoría que De Finetti (1937) llamó probabilidad personal o subjetiva; en esta teoría la probabilidad que tú asignas a una proposición particular depende de tu propio juicio personal, pero el conjunto de todas tus asignaciones de probabilidad debe estar sometido a reglas rigurosas de coherencia interna. Independientemente de aceptar la teoría lógica o personal, ambas son plenamente epistemológicas, interesadas en la credibilidad de proposiciones a la luz de un juicio o evidencia.

En el enfoque aleatorio de la probabilidad hay una familia de teorías estadísticas que se centran en el estudio de la tendencia que muestran algunos fenómenos experimentales o naturales, a producir frecuencias estables a largo plazo en ensayos repetidos. La probabilidad de salir «caras» es una propiedad de la moneda como lo es su masa, y la estabilidad de las frecuencias en ensayos repetidos es un hecho objetivo de naturaleza independiente del conocimiento de cualquier persona sobre ello.

Es interesante analizar el caso de Jacques Bernoulli (1654-1705) que es visto como subjetivista por unos, como logicista por otros y frecuencialista por otros. Se le ha llamado subjetivista porque introdujo la palabra 'subjetivo' al reflexionar sobre la probabilidad; otros dicen que anticipa la teoría de probabilidades logicista de Carnap y por fin, hay algunos que le consideran el precursor de la versión frecuencialista en virtud de su ley de los grandes números. Aunque se considera que estas tres concepciones de la probabilidad son virtualmente incompatibles, muchos investigadores afirman que se pueden encontrar los orígenes de todas ellas en el trabajo de Bernoulli. La verdad de la cuestión puede ser que se sintió atraído por todas y cada una de esas ideas aparentemente incompatibles pero que suponen, cada una de ellas, una interpretación específica de la probabilidad. En todo caso, conviene señalar el dato significativo de que las teorías de hoy ya se pueden distinguir en el nacimiento del concepto de probabilidad.

En el Renacimiento lo que se llamó entonces probabilidad era un atributo de opinión y se contraponía a conocimiento que se podía obtener sólo mediante demostración. Así, surgió una dualidad entre ciencia (conocimiento) y opinión (creencia); había «altas ciencias», como matemáticas, mecánica, astronomía y filosofía, que buscaban verdades absolutas y «bajas ciencias», como medicina, astrología y alquimia, que producían opiniones basadas en evidencia empírica (Hacking, 1975). Galileo consideró la probabilidad como «ciencia baja», basada en la opinión. Una opinión, en principio, tenía tanto peso como cualquiera otra y sólo era más probable si estaba soportada por alguna autoridad; por ejemplo, en el caso de enfoques contrapuestos a un problema, la solución tenía que basarse en opiniones de las escrituras y en las enseñanzas de la Iglesia. Para que emergiese nuestra moderna versión matemática de la probabilidad, tenía que cambiar el concepto de lo que se consideraba evidencia aceptable. Antes del S. XVII se consideró la probabilidad como una materia de aprobación más que un cálculo matemático. Finalmente, la idea de evidencia experimental empezó a ganar respetabilidad en el S. XVII gracias a los trabajos de Pascal y Huygens. Mientras las ciencias clásicas intentaban deducir efectos a partir de Primeras Causas, la nueva ciencia intentaba inducir causas a partir de efectos observados. Aquí descansan las semillas de nuestra estadística.

Queremos señalar otra característica de la disciplina estadística que puede haber sido un obstáculo para el desarrollo temprano de conceptos formales de probabilidad. Ante una situación de incertidumbre, gobernada por los dados que interpretan el juicio divino, tiene para el hombre el mayor interés el siguiente resultado, el número que saldrá en el siguiente lanzamiento. El hombre no puede conseguir ninguna predicción definitiva y sólo puede especular a partir de patrones de resultados previos o confiar en la divina voluntad. Sin embargo para progresar en la formalización del concepto de probabilidad hay que considerar el siguiente resultado sólo como representativo de resultados futuros o hipotéticos. Sólo esta transformación del problema lo hace abordable pero no da una respuesta a la cuestión original. La probabilidad de 1/6 no dice nada acerca de que número se obtendrá realmente y si saldrá un «cinco» en la siguiente tirada de un dado. Sin embargo y sorprendentemente, la probabilidad de 1/6 constituye algún conocimiento indirecto para una tirada específica. Este aspecto de la probabilidad, todavía motivo de debate filosófico, es un obstáculo importante para la comprensión de los alumnos.

Con todo, no conviene sobreestimar la tardía conceptualización de la probabilidad porque esto también ocurre en otras disciplinas. El desarrollo científico basado en un enfoque físico causal enfrentado a un enfoque deístico estuvo marcado por grandes controversias incluso sobre las ideas que hoy nos parecen más naturales (no hay más que recordar los problemas de Galileo con la Iglesia Católica). La geometría euclidiana no supuso una temprana clausura conceptual ni de la geometría ni del pensamiento axiomático, tal como a veces se dice, en cuanto que sólo proporcionó reglas de construcción pero no conceptos formales; el problema del axioma de las paralelas no se clarificó hasta los trabajos de Gauss y Lobachevski en el S. XIX. En aritmética no se consiguió una axiomatixación de los números hasta Peano, apenas hace 100 años. También es verdad que un nivel de desarrollo conceptual similar en probabilidad se alcanzó todavía más tarde puesto que la axiomatización de la probabilidad data de 1933.

1.2. Hitos en la historia de la probabilidad

Después de analizar el hecho crucial de la emergencia tardía y dual de la probabilidad y de sus posibles causas, conviene volver sobre nuestros pasos. Vestigios de situaciones probabilísticas se pueden encontrar en las antiguas culturas de la India, Babilonia y Egipto. Entre los objetos más antiguos que se conocen usados en juegos de azar se encuentra el astrágalo, un hueso pequeño del pie. Los soldados romanos jugaban con esos huesos. Es posible que los primitivos dados se hicieran alisando las superficies rugosas del astrágalo hasta que estuviesen regulares. Con todo, mientras se usaron huesos auténticos no se podía garantizar la regularidad de la caída puesto que influía el tipo de hueso de animal que se usaba y su desgaste.

Por contra, los cubos de cerámica que se usaron en Babilonia 3000 años A.C. eran dados casi perfectos. Es natural pensar que se obtuvo considerable experiencia estadística del lanzamiento de dados o de la extracción de judías o granos contenidos en urnas que se realizaban en ceremonias religiosas; sin embargo, el progreso conceptual basado en la regularidad de la caída del dado fue muy lento. Es posible que se enseñase a los sacerdotes a manipular la caída del dado para lograr el resultado deseado como la interpretación del juicio divino y que se considerase impío y por tanto susceptible de castigo cualquier especulación en las leyes del azar en cuanto suponían intromisión en los misterios de la deidad.

Se atribuye a Cardano la primera referencia al proceso de abstracción que va desde la experiencia aleatoria al concepto teórico de probabilidad; por primera vez se encuentra una idealización explícita de equiprobabilidad basada en la abstracción de un dado normal. Cardano (1501-1576) analiza el lanzamiento de un dado en Liber de *ludo aleae*: «La mitad del número total de caras representa la igualdad; así, son iguales las probabilidades de que un punto dado salga en tres tiradas, cuando el circuito total es de 6, y de que salga uno de tres puntos dados en una tirada. Por ejemplo, puedo conseguir tan fácilmente 1, 3 ó 5 como 2, 4 ó 6. Las apuestas hay que hacerlas de acuerdo con esta igualdad si el dado está equilibrado» (citado en Hacking, 1975, p. 54).

Por «son iguales las probabilidades de que un punto dado salga en tres tiradas...», Cardano parece referirse a lo que hoy en día se expresa mediante el concepto de esperanza matemática ($np=3.1/6=1/2$); en este sentido sí que son iguales las dos cantidades. Sin embargo, la probabilidad de conseguir al menos una vez un punto dado en 3 tiradas es $1-(5/6)^3=91/216$, que es menor que 1/2 (la probabilidad de que salga uno de tres puntos dados en una tirada). El argumento de Cardano es por tanto, un híbrido de equiprobabilidad y esperanza. Con todo, es dudoso que realmente hubiera hecho una abstracción desde las frecuencias empíricas al concepto teórico de probabilidad puesto que no intentó definir el concepto explícitamente, más bien parece que Cardano simplemente evalúa una probabilidad específica.

Un siglo después Pascal (1623-1662) y Fermat (1601-1665) consiguieron un auténtico y crucial progreso en la conceptualización de la probabilidad como denota su famosa correspondencia de 1654 (que no fue publicada hasta 1679) donde aparecen resueltos dos problemas específicos planteados por de Méré. La historia de la relación entre Pascal (el austero jansenista) y el Caballero de Méré (el hombre de mundo) resulta tan familiar que es, quizá, el único acontecimiento en la historia de la probabilidad que se puede considerar de conocimiento general. Mucho menos conocida es la relación entre Pascal y Roannez (otro aristócrata mundano y con talento matemático) a quién Hacking llama «la partera del cálculo de probabilidades»; el círculo de Roannez que engloba a Pascal, Fermat, de Méré y el propio Roannez, es el caldo de cultivo primigenio donde surge la teoría de probabilidades matemática (un buen nacimiento, el placer del cuerpo y el rigor del espíritu en fructífero contubernio).

El primer problema que de Méré planteó a Pascal fue: ¿Al lanzar dos dados, cuántos lanzamientos son necesarios para tener una probabilidad de 0.5 de conseguir al menos un «doble seis»? Méré tenía dos respuestas posibles, 24 ó 25; la primera respuesta la basaba en un cálculo aritmético mientras la segunda la fundamentaba en la experiencia; pensaba que su problema mostraba una contradicción de la propia aritmética. El razonamiento del Caballero de Méré era: Consideremos una situación en la que tenemos 1 posibilidad entre N de ganar en un juego. Sea n el número de ensayos requeridos para tener la probabilidad 0.5 de ganar. Aparentemente la regla que aplica de Méré es que n/N es constante: por ejemplo, en el caso de un dado con el que intentamos conseguir un «seis», N es 6 y n es 4, es decir, n/N es 2/3. En el lanzamiento de dos dados, N es 36 y por tanto n debe ser 24. Pascal mediante una enumeración exhaustiva de posibilidades mostró que la probabilidad de conseguir un «doble seis» en 24 tiradas de dos dados es 0.491 mientras que en 25 tiradas es 0.505.

Este razonamiento del Caballero es de rabiosa actualidad porque nuestros alumnos también se dejan llevar por el sesgo de «la regla de tres», si se les propone la siguiente cuestión: «Hay que decidir entre dos juegos. En el juego 1, el jugador gana si hay al menos un «seis» en 4 tiradas de un dado; en el juego 2, el jugador gana si hay al menos un «doble seis» en 24 tiradas de dos dados. ¿Que juego prefieres? «La solución normativa es:

$$P(\text{ganar en el juego 1}) = 1-(5/6)^4 = 671/1296 = 0.508 > 0.5$$
$$P(\text{ganar en el juego 2}) = 1-(35/36)^{24} = 0.491 < 0.5$$

Los alumnos, como haría de Méré, rechazan esta solución y defienden la equivalencia de los dos juegos mediante el argumento de que 24 es a 36 (el número de casos para dos dados) como 4 es a 6 (el número de casos para un dado). Forma parte de la leyenda probabilística que de Méré ganó gracias al juego 1 pero perdió toda su fortuna en el juego 2. Es difícil de creer que los jugadores observaran una diferencia en las probabilidades de los dos juegos a pesar de su gran experiencia práctica. El razonamiento de de Méré se basa quizá en un conflicto teórico entre una enumeración directa del conjunto de probabilidad fundamental (CPF) y la regla de casos favorables a posibles. Esta regla produce soluciones correctas si es aplicada a sucesos favorables que son elementos simples del espacio muestral. Pero en los juegos anteriores se aplica la regla a series de 4 ó 24 ensayos como casos favorables los cuales no son, evidentemente, elementos del mismo espacio muestral. Además hay una confusión con el valor esperado del juego: el número esperado de «seises» en una serie de 4 ensayos es 4.(1/6); el número esperado de «dobles seises» en una serie de 24 ensayos es 24.(1/36), por tanto el número esperado de «éxitos» es igual en ambos juegos.

El segundo problema que de Méré planteó a Pascal (el problema de la división de premios) se refiere al reparto equilibrado de premios si un juego tiene que pararse o finalizarse antes de lo previsto. Al comienzo del juego dos jugadores A y B apuestan la misma cantidad; por ejemplo, se trata del lanzamiento sucesivo de una moneda normal y A apuesta a «caras» y B a «cruces». El jugador que gane primero un cierto número de puntos, fijado de antemano, gana la cantidad total apostada. Sin embargo, el juego tiene que ser interrumpido antes que cualquiera de los jugadores haya alcanzado el número requerido de puntos y el premio tiene que dividirse. Si, por ejemplo, se requieren 5 puntos para ganar y la puntuación en el momento de parar el juego es 4 a 3 favorable al jugador A ¿cuál es la división razonable de premios? Este es un viejo y famoso problema desde el S. XIII del que se han dado numerosas soluciones, casi siempre no estadísticas.

Lo mismo ocurre siempre que hemos propuesto este problema a nuestros alumnos. La mayoría de sus soluciones supone realizar un reparto proporcional a 4 y a 3. Les recordamos que el jugador que hubiese ganado se habría llevado todo el dinero, independientemente de los juegos que hubiese ganado el perdedor y que, por lo tanto, no es razonable hacer tal reparto proporcional. También les insistimos en que el reparto no depende de lo que «ha pasado» sino de lo que «puede pasar». Pero todas estas reflexiones no les sirven de mucha ayuda, aunque siempre hay algún alumno que llega a la solución normativa: tres partes para A y una para B.

Pascal y Fermat basaron su enfoque del problema estableciendo el escenario de lo que sucedería si el juego continuaba y si las probabilidades de los jugadores eran iguales en cada ensayo o repetición del juego. Los premios deberían dividirse proporcionalmente a la probabilidad de ganar si el juego continuaba hasta el final, es decir, A debería llevarse los 3/4 del premio y B el resto. En efecto:

P(gane jugador B) = P(B gane dos siguientes repeticiones del juego) = (1/2).(1/2) =1/4

P(gane jugador A) = 3/4

Si nos hemos detenido en el análisis de estos dos históricos problemas es por un doble motivo: en primer lugar, porque muestran cómo problemas que exigen un sencillo cálculo de probabilidades pero resultan muy difíciles para nuestros alumnos también lo eran para los ilustres pioneros de la teoría de probabilidades; en segundo lugar, porque muestran cómo la relación aritmética-probabilidades no siempre es tranquila: en estos dos problemas, la fuerte tendencia de los alumnos (y también del Caballero de Méré) a utilizar la regla de tres o el reparto proporcional dificulta la comprensión probabilística de ambos problemas. Es una señal del cuidado educativo que hay que tener porque la intuición estadística no se adiestra naturalmente, implícitamente, en la escuela sino, quizá, todo lo contrario. En todo caso, el tipo de razonamiento que hay que utilizar para resolver los dos problemas, es justamente el que nos gustaría que usase una persona que haya tenido varios años de entrenamiento en matemáticas y teoría de probabilidades.

Aunque Cardano y Galileo realizaron cálculos probabilísticos y Pascal y Fermat exploraron interesantes problemas de probabilidad, el científico que sintetizó ideas de modo sistemático y que realizó generalizaciones desde las soluciones de problemas fue Christian Huygens (1629-1695); él fue el primero que estableció formalmente la idea de esperanza matemática, por ejemplo. Su libro De *ratiociniis in aleae ludo* fue publicado en 1657 y no fue reemplazado durante más de 50 años hasta que Jacques Bernoulli lo incorporó en parte a su obra maestra *Ars conjectandi* (1713).

Puede parecer que la noción de esperanza matemática debía emerger más fácilmente que la noción de probabilidad. Desde una perspectiva aleatoria, la esperanza es la ganancia media en una larga serie de juegos similares. Podemos «ver» realmente las ganancias o pérdidas de una opción persistente. Traducimos la ganancia total en ganancia media y observamos la esperanza con mucha más facilidad que la probabilidad. Sin embargo, el mismo concepto de media es nuevo en 1650; antes de esa fecha, un jugador podía notar que una estrategia era más ventajosa que otra pero hay un salto entre este hecho y el conocimiento cuantitativo de la esperanza matemática.

El libro de Huygens sobre los juegos de azar tiene el mismo objetivo de rigor que un tratado moderno y llega a deducir mediante una forma muy elaborada de razonamiento que el valor de un juego donde hay p posibilidades de obtener a y q posibilidades de obtener b, equivale a $(pa+qb)/(p+q)$. Aunque el autor holandés no habla de esperanza (una denominación que surge de la traducción latina de su libro donde aparece el término *expectatio)*, tiene el mérito de haber usado este concepto. Utilizó la probabilidad como un concepto elemental no definido y lo justificó en referencia a los juegos reales de azar. Con Huygens se desarrolló una rama de aplicaciones estadísticas de la probabilidad en cuanto que estableció tablas de mortalidad, definió conceptos teóricos como tiempo medio de vida y trató las frecuencias de la misma manera que las probabilidades.

Los problemas que aparecen al final del libro fueron objeto de estudio durante varias generaciones de probabilistas. Algunos problemas son ambiguos lo que refleja de nuevo la dificultad de interpretación de los enunciados probabilísticos y lo mal establecido que estaba el propio lenguaje de la teoría de probabilidades. Por ejemplo, un problema decía: «Tres jugadores A, B y C meten 12 fichas en una bolsa de las que 4 son blancas y 8 negras. El ganador es quién primero extraiga una ficha blanca. El orden en que extraen los jugadores es primero A, luego B, después C, después A y así hasta terminar ¿Qué relación hay entre las probabilidades de ganar que tiene cada jugador?». Jacques Bernoulli ya señaló que hay al menos tres diferentes interpretaciones: primera, cada vez que se extrae una ficha negra se devuelve a la bolsa; segunda, las extracciones son sin reemplazamiento; tercera, podemos suponer que cada uno de los tres jugadores comienza con su propia bolsa de doce fichas y las va extrayendo sin reemplazamiento. En la correspondencia que se cruzó Huygens con otros estudiosos de la época aparece la ambigüedad de la interpretación de unos y otros aunque parece que Huygens se inclina por la primera interpretación.

Hay otra consideración sobre el concepto de esperanza matemática que tiene que ver con el concepto de esperanza de vida y que es muy instructiva sobre la sutileza de los conceptos probabilísticos. En 1662, John Graunt usó los datos de natalidad y mortalidad de Londres para realizar inferencias acerca de diversas variables (llegó a establecer, por ejemplo, que la proporción de nacimientos de niños/niñas era 1.05) . Aunque Huygens recibió una copia del libro no le concedió mucha importancia hasta que su hermano Ludwig, que había leído el libro de Graunt, le preguntó cual sería la esperanza de vida de un niño recién nacido según las tablas de Graunt. Como no conoce el término esperanza de vida, Ludwig escribe: *la question est jusqu'à quel âge doit vivre naturellement un enfant aussitot qu'il est conçue.* El propio Ludwig realiza un cálculo del tipo $(ap+bq)/(p+q)$ y llega a la conclusión de que 18.2 años es la esperanza de vida de un niño recién concebido.

Christian le matiza este resultado explicando que aunque la esperanza de vida sea 18.2 años, esto no significa que se espera que la mayoría de los recién nacidos vivan 18.2 años sino que la mayoría de ellos morirán bastante antes: «Imagina que las personas fueran todavía más débiles en su infancia que lo son ahora y que 90 de cada 100 muriesen antes de los 6 años pero los que pasasen esta edad fuesen matusalenes y viviesen en media 150 años». En este caso la esperanza de vida de un recién nacido sería aproximadamente de 18 años pero cualquiera que apueste a que un recién nacido concreto no pasará de los 6 años tiene una enorme ventaja sobre otro que apueste lo contrario. La dificultad del problema surge del propio enunciado oscuro de Ludwig, *jusqu'à quel âge on doit vivre naturellement.* Hoy día, la gran disminución de la mortalidad infantil hace que la edad esperada de vida y la edad mediana de vida estén muy próximas pero en el siglo XVII la edad esperada era 18.2 años mientras que la edad mediana era 11 años, según los datos de Graunt. De la correspondencia de los dos hermanos parece deducirse que aunque Ludwig dio la respuesta de 18 años el número que realmente buscaba era 11.

Leibniz (1646-1716) no hizo una contribución formal fundamental a la teoría de probabilidades pero tuvo un profundo interés en el tema. Hacking (1975) afirma que fue el primer filósofo de la probabilidad. Fue el primero en decir que la teoría de la probabilidad podía ser una rama de la lógica comparable a la teoría de la deducción y la intentó axiomatizar como una ciencia inferencial pura. Antes de dominar el trabajo de Pascal, de Huygens y de otros matemáticos, había intentado desarrollar una aritmética de la probabilidad que no estaba basada en juegos de azar y por tanto tenía más aplicaciones potenciales. Escribió la primera monografía de la teoría combinatoria (Ars *Combinatoria*) y observó su relación con la teoría de probabilidades. Predijo que una teoría de juegos generalizada debería ser el fundamento para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

De nuevo, y con el pensamiento puesto en nuestros sufridos alumnos, debemos insistir en la dificultad de los problemas probabilísticos, aún en los aparentemente fáciles. Es arriesgado cuestionar el rigor de razonamiento de Leibniz y sin embargo, uno de nuestros mejores matemáticos «se despistó» al calcular probabilidades en el lanzamiento de dos dados. Leibniz creía que las sumas 11 y 12 tenían iguales probabilidades, porque cada una de ellas puede conseguirse solamente con una combinación de dos dados; su fallo fue no darse cuenta de que 12 sólo puede hacerse de una manera (6+6), mientras que 11 puede hacerse de dos maneras (5+6 ó 6+5), siendo de esta forma doblemente fácil lograr la suma 11 que la 12.

El libro de J. Bernoulli *Ars conjectandi* presenta las innovaciones conceptuales más decisivas en la historia temprana de la probabilidad. El autor estuvo trabajando en el libro durante 20 años y aunque probó el teorema clave (la ley de los grandes números) en 1692 no quedó satisfecho y no lo publicó. Por fin el libro fue publicado a título póstumo en 1713 por su sobrino Nicolás. Tiene cuatro partes. La primera es una versión mejorada del libro de Huygens sobre juegos de azar; Bernoulli tiene un gran talento para dar explicaciones intuitivas de conceptos técnicos, así, explica la esperanza matemática como la esperanza de conseguir lo mejor menos el temor de conseguir lo peor y presenta de modo gráfico e impactante la ley de la adición de probabilidades para sucesos disjuntos. En la segunda parte Bernoulli presenta la teoría de combinaciones y en la tercera aplica los resultados encontrados a la resolución de nuevos problemas sobre juegos de azar. Es en la última parte del libro, titulada «Aplicaciones de lo anterior a problemas económicos, morales y civiles», donde Bernoulli revoluciona la teoría de probabilidades; la revolución es doble: por primera vez se declara explícitamente una concepción subjetiva de la probabilidad y se prueba el primer teorema límite.

La primera ley de los grandes números, que Bernoulli llamó *teorema aureum*, supuso un decisivo progreso conceptual en cuanto que estableció el fundamento sólido para enlazar las frecuencias relativas y las probabilidades. El problema planteado es el siguiente: supongamos que lanzamos, sucesivamente, una moneda con probabilidad p de salir cara ¿Qué podemos decir sobre la frecuencia relativa de caras en una sucesión larga de lanzamientos de la moneda? Este problema es el origen de los teoremas límite en probabilidades: las leyes de los grandes números y el teorema central del límite. J. Bernoulli demuestra que la frecuencia relativa de caras en n lanzamientos de una moneda regular (p=1/2) «converge» a 1/2. La convergencia de Bernoulli (convergencia en probabilidad) tiene el siguiente sentido:

$$P[\,|(\text{n}^{\circ}\ \text{caras}/n) - 1/2\,| > \varepsilon\,] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty\ \forall\varepsilon > 0$$

En definitiva, este teorema prueba que las frecuencias relativas convergen en probabilidad a la probabilidad subyacente. Bernoulli afirma que este teorema nos permite averiguar a posteriori lo que no podemos determinar a priori, esto es, averiguarlo a partir de los resultados observados en numerosos ejemplos similares. Laplace (1749-1827) generalizó el resultado de Bernoulli a cualquier valor de p. Borel en 1909 lo generalizó a un tipo de convergencia más fuerte (convergencia casi segura).

Bernoulli da un giro desde el concepto de esperanza de Huygens al de probabilidad que se convierte en el concepto central y se enriquece con un tratamiento sistemático de la combinatoria. Sus ideas filosóficas, sin embargo, todavía se pueden definir como un determinismo metafísico. Todos los fenómenos (tiempo atmosférico, el lanzamiento de dados, los eclipses, etc.) están gobernados por leyes determinísticas. El azar sólo se explica por nuestro limitado conocimiento de esas leyes y las aplicaciones de la probabilidad se deberían restringir a los juegos porque la mayoría de los fenómenos son tan complejos que es inútil estudiar los casos posibles que conforman el espacio muestral.

Hay algunas indicaciones de que el concepto de distribución de probabilidad aparece en el S. XVIII. De Moivre (1667-1754) fue el primero en encontrar la función que hoy se llama la función de densidad normal: estudiando cómo en n lanzamientos de una moneda regular, se desvía la frecuencia relativa de caras de la probabilidad teórica de 1/2, obtuvo la primera versión del teorema central del límite y la Ley Normal. En términos modernos, buscaba una distribución de las desviaciones de las frecuencias relativas H/n de la probabilidad subyacente p para un tamaño de muestra fijado n. Lo resolvió para $p=1/2$ deduciendo la distribución límite para $n \to \infty$. Para de Moivre la densidad normal servía sólo como una herramienta para la aproximación numérica y no tenía significado probabilístico propio.

Es curioso el hecho de que hay vestigios de inferencia estadística antes de cualquier intento fundamentado de definición del concepto de probabilidad y que estos vestigios aparecen en relación a la más importante y repetida de las experiencias aleatorias cual es el nacimiento de un niño. Arbuthnot (1667-1735) analizó las estadísticas de nacimientos de Londres durante 80 años sucesivos y encontró que nacían más niños que niñas cada año. Si la probabilidad de nacimiento de un varón fuese $p=1/2$, la probabilidad de un suceso tal sería muy pequeña. Por ello rechazó la hipótesis $p=1/2$, sustituyéndola por la hipótesis $p>1/2$. Esta fue, quizá, la primera prueba de significación. La justificación de $p>1/2$ para Arbuthnot, estaba en la voluntad divina de compensar el mayor número de fallecimientos de los hombres como consecuencia de accidentes laborales y guerras, con el fin de mantener el equilibrio entre los sexos y asegurar así la monogamia. Si Dios no existe, argumentó, no hay motivo especial para que no sean iguales las probabilidades de niño o niña, por tanto los datos empíricos confirman «la Voluntad de Dios en acción».

Buffon (1707-1788) utilizó un argumento similar para probar que los planetas se originaron de una causa común que supuso fue la colisión del sol con un cometa. En definitiva, este tipo de argumento consiste en evaluar una hipótesis H mediante un suceso observado realmente E, vía la probabilidad condicional $p(E/H)$. Si esta probabilidad es pequeña entonces se rechaza la hipótesis H. Hoy en día, este tipo de argumento no se usa para evaluar una hipótesis simple sino sólo para comparar la plausibilidad de hipótesis competitivas.

El trabajo de Laplace (1749-1827) marcó una culminación en el desarrollo conceptual antiguo de la probabilidad; con él comenzó la edad moderna de la probabilidad. Filosóficamente, sin embargo, su enfoque se basaba todavía en un determinismo mecanicista: «Una inteligencia que comprendiese todo...nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado, estarían presentes ante sus ojos... La probabilidad es relativa en parte a (nuestra) ignorancia y en parte a nuestro conocimiento» (Laplace, 1985, p. 27).

Laplace dio la primera definición explícita de probabilidad, la llamada probabilidad clásica: la probabilidad p(A) de un suceso A es igual a la proporción del número de resultados que son favorables al suceso A en relación al número de todos los resultados posibles de la prueba. Esta definición asume implícitamente que los resultados individuales son equiprobables. Laplace formuló el «principio de razón insuficiente» para operativizar la regla; según este principio, debemos asumir que los resultados son equiprobables si no tenemos razón para creer que alguno de los resultados es más probable que otro. Esta primera definición formal no clarifica la naturaleza de la probabilidad en cuanto que para su operatividad se refiere a un principio oscuro filosóficamente y tiene un dominio de aplicación que no engloba los problemas reales. Los intentos posteriores que se hicieron para corregir este principio (basado en consideraciones de indiferencia o invariancia) no tuvieron éxito. Había algunos problemas e ideas que dificultaban el progreso conceptual.

Bayes (1702-1761) había justificado el uso de una distribución uniforme en el intervalo (0,1) para un parámetro binomial p ante la completa ignorancia de los resultados de un experimento de Bernoulli. Su argumentación la utilizó Laplace para formular el principio de razón insuficiente como una guía básica para aplicar su definición de probabilidad. El problema es que en el caso extremo de ignorancia completa, el principio de Laplace se podría utilizar para establecer una equiprobabilidad de todos los casos posibles lo que es claramente una clase de información. Si se toma por absolutamente válido, este principio produce una regla muy ambigua que transforma ignorancia en conocimiento.

El intento de representar los casos equiprobables de un modo auténticamente objetivo causa dificultades. Una manera de justificar el principio de Laplace es buscar simetrías físicas del fenómeno aleatorio en cuestión, por ejemplo, la simetría física del dado conduciría directamente a la equiprobabilidad de sus caras. Sin embargo, hay muchas simetrías físicas posibles, por tanto, una teoría verdaderamente objetiva requiere un procedimiento para elegir una simetría particular y justificar esa elección. Fine (1973) ilustra las dificultades con el ejemplo de la experiencia aleatoria de lanzar dos dados, donde se pueden plantear al menos tres modelos:

Modelo de Maxwell-Boltzmann: los 36 pares (1,1), (1,2),..., (6,5),(6,6), son igualmente probables, de modo que los pares como (2,3) y (3,2) son resultados diferentes.

Modelo de Bose-Einstein: los 21 pares (1,1), (1,2) ,..., (1,6), (2,2), (2,3),....(5,5),(5,6),(6,6), son igualmente probables, de modo que los pares como (2,3) y (3,2) se tratan como resultados idénticos.

Modelo de Fermi-Dirac: los 15 pares (1,2),(1,3), ..(1,6),(2,3),(2,4),..., (5,6), son equiprobables de modo que se eliminan las parejas con los dos componentes iguales.

Para los dados ordinarios, la estadística de Maxwell-Boltzmann es el modelo natural; los dos dados son discernibles (dado azul y dado rojo o dado primero y dado segundo, etc.) y de ese modo la hipótesis de independencia es altamente plausible. Este modelo natural, sin embargo, no es verdad para muchas aplicaciones en física. Según Feller (1973) se han hecho numerosos intentos para probar que las partículas físicas se comportan de acuerdo con la estadística de Maxwell-Boltzmann pero la teoría moderna ha mostrado que esta estadística no se aplica a algunas partículas conocidas. En efecto, la estadística de Bose-Einstein parece apropiada para fotones, núcleos y átomos y la estadística de Fermi-Dirac es apropiada para electrones, protones y neutrones.

Así, el modelo natural para los dados y su simetría subyacente es, con frecuencia, inapropiado para representar fenómenos con partículas físicas lo que reduce considerablemente su campo de aplicación. El ejemplo también muestra que hay diferentes posibles simetrías en la misma situación física; es interesante notar que sobre esta cuestión también surgen problemas pedagógicos. La probabilidad no puede ser una característica inherente de los objetos reales sino sólo un resultado de nuestra tarea de modelar la realidad. El empeño en deducir probabilidades únicas ha llevado a paradojas sin solución. Fine (1973) resume su crítica a la definición de Laplace afirmando que no podemos extraer información (una distribución de probabilidad) de la ignorancia, que el principio de razón insuficiente es ambiguo y su aplicación lleva frecuentemente a inconsistencias y que, en definitiva, el enfoque clásico de la probabilidad ni es una teoría objetiva ni una teoría empírica.

Como cuenta Martín Gardner (1984), los griegos y romanos preferían jugar con tres dados y Platón en sus Leyes (libro 12) menciona que 3 y 18 son, en este caso, las sumas más difíciles por ser las únicas que sólo pueden conseguirse de una forma: (1, 1, 1) y (6, 6, 6); los griegos llamaban «el perro» a la primera forma y «Afrodita» a la segunda. También, en los siglos XVII y XVIII, era más común jugar con tres dados que con dos y por tanto el problema planteado históricamente fue: ¿Cuántas alternativas iguales surgen al lanzar tres dados? Este problema combinatorio dio lugar a interpretaciones muy interesantes: ya hemos comentado que Leibniz cometió el error de considerar que se forma el espacio muestral de resultados igualmente probables con las combinaciones y no con las variaciones; esto es, aceptó la estadística de Bose-Einstein para los dados. Galileo se inclinó por la estadística de Maxwell-Boltzmann con la siguiente argumentación: con tres dados, hay el mismo número de combinaciones que sumen 9 y 12 y que sumen 10 y 11; exactamente hay 6 combinaciones. Sin embargo, se sabe por observaciones sistemáticas de gran número de lanzamientos de tres dados que las sumas 10 y 11 son más ventajosas que las sumas 9 y 12; la explicación es simple, a saber, que las 6 combinaciones que producen la suma de 9 ó 12 se pueden descomponer en 25 variaciones mientras que las 6 combinaciones de 10 y 11 se descomponen en 27 variaciones. Si las variaciones son igualmente probables, entonces 11 es más ventajoso que 12 en la proporción de 27:25.

El argumento de Galileo (1564-1642) parece el primer caso de refutación de una hipótesis estadística por observación a largo plazo. Se tiene la hipótesis de que las combinaciones son equiprobables *versus* la hipótesis de que lo son las variaciones; la primera es inconsistente con los hechos, mientras que la segunda se ajusta a los hechos perfectamente. Desde luego, hubiera sido más simple contrastar las hipótesis observando las frecuencias relativas de las sumas 4 y 3 que se consiguen con una única combinación (1+1+2 ó 1+1+1, respectivamente) pero, a su vez, la suma 4 se consigue con tres variaciones (1+1+2, 1+2+1, 2+1+1) y la suma 3 con 1 variación. Sin embargo, en juegos estándar de 3 dados, tanto la suma 4 como 3 son raras, difíciles de conseguir, por tanto no es fácil registrar la experiencia a largo plazo, y sí lo es con las sumas 9, 10, 11 y 12 que ocurren con mayor frecuencia.

Volviendo a Laplace, su Teorema Central del Límite supone un avance estadístico crucial. Este teorema enuncia, en esencia, que la distribución binomial se aproxima a la distribución normal cuando el número de ensayos se incrementa al infinito. Laplace creía que la ley normal podría jugar un papel análogo a la ley de gravitación universal que explica la mayoría de los fenómenos celestes. Cualquier variable general podría ser explicada por la ley normal descomponiéndola en una suma de cantidades aditivas, las distribuciones de las cuales podrían incluso ser desconocidas.

El argumento intuitivo de Laplace sobre la universalidad de la distribución normal fue muy pronto recogido por otros autores. Gauss (1777-1855) usó la distribución normal no sólo como una herramienta para la aproximación sino como una distribución en sí misma. Su enfoque estaba anclado en la teoría del error; al establecer la media como el más apropiado de los valores que reemplazan varias medidas repetidas de una cantidad desconocida, reconocía que primero había que conocer la distribución de los errores de medida. Quetelet (1796-1874) desarrolló la idea del hombre promedio en analogía a la teoría del error. Galton, pariente de Darwin y biólogo como él, escribió «Herencia Natural», en 1889, donde estableció la ley de regresión universal y simuló una demostración práctica de pruebas binomiales y del teorema central del límite. Había entre los investigadores de la época un entusiasmo romántico que Galton supo expresar con gran lirismo: «No conozco casi nada tan apto para impresionar la imaginación como la forma maravillosa de orden cósmico expresada por la 'Ley de Frecuencia del Error'. La ley hubiera sido personificada y deificada por los griegos, si la hubieran conocido. Reina con serenidad y con completa discreción entre la más amplia confusión. Cuanto más abultado el gentío y mayor la aparente anarquía más perfecto es su dominio. Es la suprema ley de la Sinrazón» (citado en Borovcnik, Bentz y Kapadia, 1991, p. 35).

Teniendo presente este entusiasmo es más fácil comprender el título de ley normal. El papel protagonista de esta ley no cambió ni siquiera cuando otras distribuciones como la de Maxwell tuvieron interés en física o cuando Pearson (1857-1936) investigó de modo sistemático otros tipos de distribuciones continuas; este matemático y abogado, influido por Galton, aplicó las probabilidades a la teoría de la evolución darwiniana y realizó estudios sobre la regresión y la correlación. La escuela rusa (Tchebychev, Markov,...) propuso varias generalizaciones del teorema central del límite aportando ideas de la teoría de la medida. Hoy día, hay un cierto decrecimiento de este protagonismo debido al auge de la estadística robusta, la estadística no paramétrica y el análisis exploratorio de datos.

La teoría de la probabilidad desarrolló un importante papel conceptual en física durante las últimas décadas del S. XIX porque algunas nuevas leyes físicas sólo podían describirse en términos probabilísticos (por ejemplo, el segundo principio de la termodinámica). Las aplicaciones estadísticas, especialmente la regresión y la correlación, culminaron en desarrollos biométricos. Sin embargo, este desarrollo está contrapesado por el hecho de que no había adecuada fundamentación salvo el intento de Laplace que, como hemos visto, tenía sus problemas. En el Congreso Matemático de París de 1900, Hilbert formuló un programa para la investigación matemática entre cuyas tareas principales estableció la de axiomatizar satisfactoriamente la probabilidad y la mecánica estadística.

Von Mises, en 1919, fue uno de los pioneros en el trabajo de axiomatización y se basó en la interpretación de la probabilidad como convergencia de frecuencias relativas, siguiendo el teorema de Bernoulli. Su enfoque no tuvo éxito; era demasiado complicado y los problemas filosóficos fueron abrumadores. Por ejemplo, el teorema de Bernoulli sobre la convergencia de las frecuencias a la probabilidad subyacente no implica la convergencia usual sino la convergencia en probabilidad. Entonces ocurre que, o bien esas dos probabilidades que entran en el teorema son del mismo tipo y por tanto no debe usarse una para la definición de la otra, o bien son de un tipo diferente que necesita ser clarificado y definido. Además, la definición de Von Mises se basa en una propiedad de aleatoriedad de secuencias que es un concepto oscuro desde un punto de vista filosófico y difícil de verificar en muchas aplicaciones. El único modo de clarificar la propiedad de aleatoriedad es por medio de la misma probabilidad lo que de nuevo marca una circularidad en el enfoque de Von Mises.

Fue Kolmogorov en 1933 quien finalmente formuló un sistema de axiomas de la probabilidad y dedujo los teoremas usuales que fueron reconocidos inmediatamente. Su enfoque significa la aplicación de principios extraídos de la teoría de la medida que habían ganado importancia al probar varias generalizaciones del teorema central del límite. El enfoque de Kolmogorov no clarificó lo que es la probabilidad, sólo elaboró las propiedades estructurales de la probabilidad y dejó la interpretación del concepto así definido de probabilidad como una cuestión abierta. Conviene señalar que este enfoque fue pensado principalmente como una justificación de la interpretación frecuencialista de la probabilidad (Kolmogorov, 1976). A pesar del éxito de la axiomatización de Kolmogorov, la controversia en fundamentos entre subjetivistas y objetivistas revivió poco más tarde con Jeffreys (1933) y De Finetti (1937).

2. Implicaciones didácticas de la historia y filosofía de la teoría de probabilidades. Paradojas y falacias probabilísticas de interés educativo

Aunque la matemática pretende tratar con verdades universales, su progreso no ha sido siempre diáfano y está salpicado de crisis fundamentales. La historia de la matemática ha revelado muchas paradojas interesantes, algunas de las cuales han servido de acicate de cambios importantes. Las paradojas y falacias, que abundan en la teoría de probabilidades, son instructivas y por eso nos interesan desde la perspectiva didáctica. Es un apasionante y novedoso enfoque que conecta muy bien con los aspectos psicológicos del aprendizaje de las probabilidades.

Hay muchas paradojas y falacias (que se entrecruzan y solapan) y por tanto no es posible dar un listado completo. Siguiendo a Borovcnik, Bentz y Kapadia (1991), hemos preferido analizar en detalle unas cuantas paradojas representativas e importantes para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades elemental. Se presentan en cuatro grupos: asignación de probabilidades, esperanza matemática, independencia y dependencia y pensamiento lógico *vs* pensamiento probabilístico.

2.1. Asignación de probabilidades

La asignación de probabilidades mediante la regla de Laplace (casos favorables/casos posibles) tiene dificultades intrínsecas como hemos visto al estudiar el lanzamiento de dos o tres dados. Esta experiencia aleatoria revela que las relaciones entre los conceptos de simetría, equiprobabilidad e independencia, en las que se basa la utilización de la regla de Laplace, no siempre están claras. Ahora analizamos dos ejemplos de probabilidades geométricas: la experiencia aleatoria del lanzamiento de un dardo a una diana y el problema clásico de la cuerda de Bertrand ejemplifican cómo diferentes hipótesis conducen a distintos modelos de asignación de probabilidades en un mismo problema.

Lanzamiento de un dardo a una diana

Es necesario construir un modelo que nos describa ese fenómeno aleatorio. Supongamos que siempre se da en la diana:

$\Omega = \{ (x,y) / x^2 + y^2 \leq 1 \}$ (círculo unidad)

Las partes de Ω es demasiado grande para poder asignar probabilidades a todos los sucesos, por tanto establecemos: $\mathcal{A}$ = {subconjuntos de Ω con área}

Se pueden establecer varias hipótesis que originan diferentes modelos de asignación de probabilidades:

Modelo 1: supongamos que el tirador no apunta

$\forall$ A $\in \mathcal{A}$, P(A) = área de A / área de Ω = área de A / π (es un equivalente continuo de la regla de Laplace: P(A)= casos favorables / casos posibles).

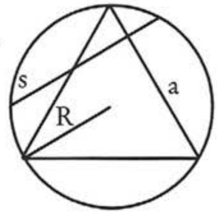
P (acertar en la mitad de arriba) = 1/2
P (acertar en el diámetro vertical) = 0, etc.

Modelo 2: supongamos que el tirador apunta y es buen tirador y por eso queremos hacer más probables los sucesos que están cerca del centro.

Se puede definir para cada punto $(x,y) \in \Omega$ una función f(x,y), densidad del punto (x,y), tal que f(x,y)>0 y disminuye al alejarnos del centro.

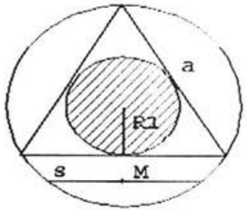
$P(A) = \int_A f(x,y)dxdy$. Obviamente debe cumplirse que $\int_\Omega f(x,y)dxdy = 1$

Problema de la cuerda de Bertrand: Se tiene un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio R y se traza una cuerda al azar ¿Cuál es la probabilidad que la longitud de la cuerda s sea mayor que el lado a del triángulo?

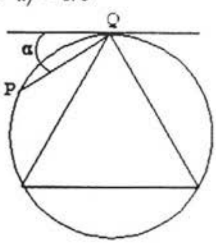


Entre varios modelos de solución, vamos a considerar dos modelos que conducen a dos soluciones distintas:

a) Se elige un punto del círculo M y se traza la cuerda perpendicular al radio que pasa por el punto. Entonces la cuerda está determinada únicamente por su punto medio M. Si M está contenido en el círculo con radio R_1, donde $R_1 = R/2$, entonces s > a, de lo contrario $s \leq a$. Por tanto P(s > a) = Área del círculo de radio R_1 / Área del círculo de radio R = 1/4.



b) Se fija un punto Q de la circunferencia y se elige al azar el otro extremo P. Sea α el ángulo que forma la cuerda así trazada con la tangente en el punto Q. La medida de este ángulo se encuentra en el rango (0,180). Si 60< α <120 se verifica que s > a, por tanto P(s > a) = 1/3



Si el azar está determinado por la equiprobabilidad de la definición de Laplace, debería haber un único conjunto de casos posibles y una probabilidad única, sin embargo, cada uno de los dos modelos representa el fenómeno aleatorio y sus probabilidades asociadas. Esto refleja un conflicto intuitivo y supone una contradicción con el principio básico de la definición de Laplace; el concepto de aleatoriedad ni está completamente cubierto por este enfoque ni es significativo sin referencia a un generador real de los sucesos.

2.2. Valor esperado

Ya hemos estudiado que, históricamente, el concepto de esperanza matemática ha sido un enfoque alternativo y a veces más importante que el concepto de probabilidad para resolver problemas de la matemática del azar. Como dicen Borovcnik, Bentz y Kapadia (1991), la Paradoja de San Petersburgo y el ejemplo de las monedas independientes ilustran las dificultades del concepto de esperanza y su relación con la probabilidad. Además, el valor esperado es un concepto clave en la conexión de la probabilidad y la estadística.

Paradoja de San Petersburgo: Dos jugadores A y B lanzan una moneda hasta que aparece una cara por primera vez. Si esto ocurre en el ensayo n entonces el jugador B paga 2^n pta. al jugador A. ¿Qué cantidad debería pagar A a B al comienzo del juego para que éste fuese equitativo?

Si X denota la cantidad que paga B, entonces su espacio muestral es un subconjunto de los números naturales. El valor esperado E(X) no existe porque la serie originada diverge:

$$E(X) = 2.(1/2) + 4.(1/4) + \ldots + 2^n.(1/2^n) + \ldots$$

Así el jugador A tendría que pagar una cantidad infinita de dinero al jugador B antes de comenzar el juego. Huygens introdujo el valor esperado como el precio equitativo de un juego estocástico. En este ejemplo, aunque la posibilidad de una larga secuencia es muy pequeña y tiende a 0, sin embargo el pago esperado es infinito. Por tanto nadie querría jugar un juego como éste en que el premio ganado es realmente una cantidad limitada de dinero.

Para resolver la paradoja, Daniel Bernoulli (1700-1782) propuso promediar las utilidades de los pagos y no los pagos específicos. Definió la utilidad como una función logarítmica de los pagos y estableció una esperanza moral finita como apuesta equitativa; por ello se le considera un precursor de la teoría de la decisión conductual. El concepto de esperanza moral se afirmó, entre otros, con Condorcet pero las circunstancias no estaban maduras para considerar la elección especial de la función de utilidad meramente como uno de varios posibles modelos (una selección de sus textos está en Condorcet, 1974).

Un problema distinto es la longitud esperada del juego que es dos ensayos, $1/p = 1/(1/2)=2$, una corta longitud que supone un pago de $2^2=4$ pts. Esos dos valores de 4 e ∞ son contraintuitivos y muestran que la relación entre diferentes esperanzas es compleja.

Monedas dependientes: Un bolsa contiene 7 monedas: 1 de 100 pta., 3 de 50 pta. y 3 de 10 pta. Se extraen 3 monedas al azar ¿Cuál es el valor esperado de su suma? ¿Es relevante si las monedas extraídas son reemplazadas?

El valor esperado de la extracción de la primera moneda es:

$$E(X_1) = (100 + 3.50 + 3.10) / 7 = 40 \text{ pta.}$$

Si las monedas son reemplazadas este es el mismo valor para la segunda y tercera extracción, por tanto $E(X_2) = E(X_3) = 40$

Si las monedas extraídas no se reemplazan entonces hay que usar los valores esperados condicionados. El valor esperado para la segunda extracción es la media ponderada de los tres valores esperados condicionados:

$$E(X_2) = (1/7).E(X_2|100)+(3/7).E(X_2|50)+(3/7).E(X_2|10) =$$
$$= (1/7)\,(180/6)+(3/7)(230/6)+(3/7)(270/6) = 40$$

Los cálculos son largos para la tercera extracción pero dan el mismo resultado. Así el valor esperado de la suma de las extracciones de las tres monedas es 120 pta. independientemente de que las extracciones hayan sido con reemplazamiento o sin reemplazamiento. Este ejemplo ilustra una propiedad fundamental de la esperanza matemática, su linealidad. Siendo X_1 ,X_2 ,X_3 variables aleatorias cualquiera (dependientes o independientes) y suponiendo que las esperanzas de cada variable existen y son finitas: $E(X_1+X_2+X_3) = E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)$.

Este problema caracteriza la diferencia entre probabilidad y esperanza. Desde la perspectiva de la probabilidad, la relación de linealidad resulta intuitivamente inaceptable si las variables aleatorias son dependientes en función de que parece contraria a los cambios en los cálculos probabilísticos que se producen si la extracción de monedas es sin reemplazamiento. Como conclusión didáctica, diremos que hay que equilibrar la importancia que se concede en la enseñanza a los conceptos de valor esperado y de probabilidad ya que la enseñanza tiende a centrarse en el concepto de probabilidad.

2.3. Independencia y probabilidad condicionada

La probabilidad de un suceso puede cambiar si se dispone de nueva información y este hecho se modela por la noción de probabilidad condicionada. Por ejemplo, si en el lanzamiento de un dado sabemos que ha salido un número par, la probabilidad del suceso «que sea un dos» es 1/3 mientras que antes de saber la nueva información la probabilidad asignada sería 1/6.

Si A y B son dos sucesos y $P(B) > 0$, se define la probabilidad condicionada de A dado B como: P[ocurra A sabiendo que ha ocurrido B]= $P(A|B)= P(A\cap B)/P(B)$.

Se dice que A es **independiente** de B si $P(A \mid B)= P(A)$. El conocimiento de que B ocurre no altera la probabilidad de A. Obviamente si A es independiente de B:

$P(A|B)=P(A) \Leftrightarrow P(A\cap B)= P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B \mid A)= P(B)$, B es independiente de A.

Se llega así a una nueva definición:

A y B son independientes si $P(A\cap B)= P(A)P(B)$

Esta definición tiene la ventaja de que no requiere como la anterior que $P(A)>0$ ó $P(B)>0$.

La independencia es un concepto clave dentro del modelo de Kolmogorov (aunque no forma parte de los axiomas) porque permite la modelización de experimentos aleatorios de pruebas repetidas lo que a su vez lleva al teorema de Bernoulli y al teorema central del límite. Con todo, abundan las intuiciones inadecuadas: la paradoja de d'Alembert no se puede resolver sin el concepto de independencia; el problema del padre y su hijo muestra que el procedimiento de obtener la información influye realmente en la probabilidad.

Problema de d'Alembert: Se lanzan al aire dos monedas ¿Cuál es la probabilidad de obtener diferentes resultados en las dos monedas?

a) La solución normativa considera que el espacio producto completo es {XX, XC, CX, CC}, con una distribución uniforme; por tanto, la probabilidad pedida es 1/2.

b) D'Alembert en 1754 se opuso a la equiprobabilidad de los cuatro resultados {CC, CX, XC, XX} al lanzar dos monedas y defendió la probabilidad de 1/3 para cada uno de los resultados 0, 1 ó 2 caras. No tuvo en cuenta el concepto de independencia.

Problema del padre y su hijo: Se sabe que un señor tiene dos hijos. Se encuentra con un amigo y le presenta al chico que va con él como su hijo. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro hijo sea también varón (V)?

a) Como hay el mismo número aproximadamente de chicos y chicas y los nacimientos son independientes, la información que se da acerca de que uno de los hijos es chico, es irrelevante y por tanto la probabilidad pedida es 1/2.

b) Las cuatro posibles combinaciones son VV, VM, MV, MM. La información dada elimina la combinación MM, por tanto la probabilidad pedida es 1/3.

A esta solución también se puede llegar utilizando probabilidades condicionadas. En efecto, sea A el suceso de que en una familia con dos hijos los dos sean varones, $P(A)=1/4$; sea B el suceso de que una familia con dos hijos tenga al menos uno varón, $P(B)=3/4$; sea $A|B$ el suceso de que tenga dos varones una familia que tiene uno:

$$P(A \mid B) = P(A\cap B)/P(B) = (1/4)/(3/4) = 1/3.$$

Sin embargo, si preguntamos la probabilidad de que una familia tenga dos varones (suceso A) suponiendo que el primer hijo es varón (suceso C), entonces:

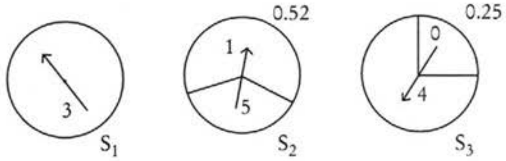
$$P(A \mid C) = P(A\cap C)/P(C) = (1/4)/(1/2) = 1/2$$

Estos dos problemas muestran la sutileza de los conceptos de independencia y de probabilidad condicionada y la necesidad de un tratamiento didáctico muy cuidadoso para que los alumnos los comprendan en profundidad.

2.4. Pensamiento lógico vs pensamiento probabilístico

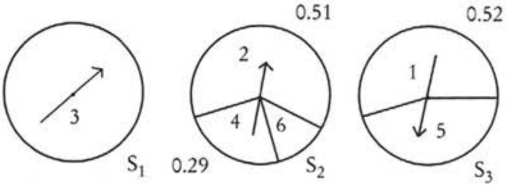
La estructura formal de la probabilidad se establece mediante el enfoque axiomático pero los axiomas no regulan la estructura de las conclusiones. Esas conclusiones tienen una estructura que difiere del razonamiento lógico y causa varias paradojas, por ejemplo, las conclusiones probabilísticas no cumplen la relación de transitividad lo que resulta muy contraintuitivo.

Ruletas intransitivas: Se dispone de las tres ruletas de la figura. ¿Cuál debe elegir un jugador para jugar si ha de competir con otro jugador?



Como $P(S_1 > S_2)=0.52$, $P(S_2 > S_3)=0.61$ y $P(S_1 > S_3)=0.25$, la ruleta S_1 es preferible a S_2, S_2 es preferible a S_3, pero S_1 no es preferible a S_3. No hay transitividad en la elección, cualquier ruleta mejora y es mejorada por otra ruleta, por tanto el jugador que elige segundo tiene ventaja. Esto es una paradoja desde la perspectiva de la lógica ordinaria en donde la transtitividad de las conclusiones es normal. La estocástica no es una forma débil de la lógica sino una forma diferente de razonamiento.

La paradoja de Blythe: Dos jugadores tienen las tres ruletas de la figura para escoger. ¿Cuál es la ruleta mejor? ¿Cambia la elección si un tercer jugador entra en el juego?



Un cálculo sencillo nos da las siguientes probabilidades:

$$P(S_1 > S_2)=0.51,\ P(S_2 > S_3)=0.62 \text{ y } P(S_1 > S_3)=0.52$$

Así S_1 es la mejor elección seguida de S_2. Sin embargo, si se introduce un tercer jugador, un cálculo un poco más largo nos conduce a que S_3, es la mejor elección:

$$P[(S_1 > S_2) \text{ y } (S_1 > S_3)]=0.51x0.52=0.27$$
$$P[(S_2 > S_1) \text{ y } (S_2 > S_3)]=0.29x0.52+0.20=0.35$$
$$P[(S_3 > S_1) \text{ y } (S_3 > S_2)]=0.48x0.8=0.38$$

Este resultado es sorprendente e intuitivamente inaceptable. La peor elección en el juego de dos personas se convierte en la mejor si participan tres jugadores. Las ruletas como aparatos físicos, son completamente independientes pero los resultados estocásticos dependen unos de otros si se trata de comparar probabilidades. Esto no es obvio pero se refleja en los cálculos relevantes; por ejemplo: $P[(S_3 > S_1) \text{ y } (S_3 > S_2)] \neq P(S_3 > S_1).P(S_3 > S_2)$. Es decir, la regla de la multiplicación no se cumple lo que significa que los juegos no son estocásticamente independientes.

Paradoja de Simpson: En 1973 en la Universidad de Berkeley en California, la tasa de admisión de mujeres (un 35% de las solicitantes) era más baja que la de hombres (un 44% de los solicitantes). Investigando la razón de esta discriminación sexual, se encontró que en algunos departamentos las mujeres tenían tasas de admisión más alta que los hombres y en la mayoría de los departamentos tenían tasas de admisión similares. ¿Es posible que las tasas de admisión para todos y cada uno de los departamentos sean más altas para las mujeres y en cambio, considerada la universidad globalmente, como un todo, la tasa de admisión de mujeres sea menor?

Vamos a simplificar el problema asumiendo que hay sólo dos departamentos

	Mujeres		Hombres	
	Admitidos	Rechazados	Admitidos	Rechazados
Departamento 1	2	3	1	2
Departamento 2	3	1	5	2
Universidad	5	4	6	4

En ambos departamentos la proporción de admitidos es más alta para mujeres que para hombres ya que 2/5 > 1/3 y 3/4 > 5/7. Pero para la universidad como un todo, se cumple lo contrario la proporción de admitidos de 5/9 para mujeres es menor que la proporción de 6/10 de hombres admitidos. Hay diferentes tasas de solicitudes para hombres y mujeres, las mujeres solicitan departamentos con baja tasa de admisión y los hombres al contrario. La paradoja surge porque los resultados parecen contrarios a la lógica ordinaria, donde tratar con casos separados es un método apropiado de prueba. Si el caso i) y el ii) cubren todas las posibilidades y son mutuamente excluyentes entonces se prueba una relación si se muestra que se sostiene tanto en el caso i) como en el ii). Esta característica estructural, sin embargo, no se manifiesta en el razonamiento probabilístico.

2.5. Conclusión

Las concepciones erróneas en los ejemplos que acabamos de revisar muestran que hay situaciones donde la intuición no guía la solución formal, incluso el resultado se percibe como paradójico. Esos ejemplos ilustran el salto entre intuición y teoría matemática, entre otras cosas porque el razonamiento estocástico no tiene control empírico fácil para revisar estrategias inadecuadas. Como dicen Borovcnik, Bentz y Kapadia (1991), las paradojas y las falacias destacan las dificultades de comprensión probabilística porque son señales de un conflicto cognitivo entre un nivel intuitivo y un nivel formalizado de razonamiento. En una paradoja, el aspecto objetivo es adecuado aunque intuitivamente inaccesible mientras en una falacia la componente objetiva es inadecuada aunque intuitivamente atractiva.

En resumen, las paradojas y las falacias pueden ser de interés en el aula en cuanto que su estudio y discusión pueden ayudar a: 1) analizar apropiadamente situaciones probabilísticas obscuras o complejas; 2) comprender mejor conceptos básicos en este campo; 3) interpretar formulaciones y resultados más efectivamente; 4) educar la intuición y razonamiento probabilístico; 5) ilustrar las dificultades del quehacer científico ante la presencia de situaciones científicas inesperadas y/o anómalas; 6) combatir el «sedentarismo» intelectual al que son proclives nuestros alumnos como lo son la mayoría de personas (el nomadismo cognitivo, la exploración, ayudan al avance científico).

REFERENCIAS

BERNOULLI, J. (1713). *Ars conjectandi.* Paris: Basle.

BOROVCNIK, M., BENTZ, H.J. y KAPADIA, R. (1991). A Probabilistic perspective. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 27-71). Amsterdam: Kluwer.

CONDORCET, J.A.C. (1974). *Mathématique et societé.* París: Hermann.

FELLER, W. (1973). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones.* México: Limusa-Wiley.

FINE, T.L. (1973). *Theories of Probability.* New York: Academic Press.

FINETTI, B. de (1937). La Prévision: Ses Lois Logiques, Ses Sources Subjetives. *Ann. de l'Inst. H. Poincaré 7.* Versión inglesa: en H.E. Kyburg and H.E. Smokler (Eds.), 1964, *Studies in Subjetive Probability* (pp. 93-158). New York: Wiley.

HACKING, I. (1975). *The emergence of probability.* New York: Cambridge University Press.

JEFFREYS, M. (1933). *Theory of probability.* London: Oxford University Press.

KOLMOGOROV, A. N. (1976). La teoría de probabilidades. En A. D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov y M.A. Laurentiev (Eds.), *La matemática: su contenido, métodos y significado.* (pp. 269-309). Madrid: Alianza Editorial.

LAPLACE, P.S. de (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades.* Madrid: Alianza Editorial. (Original de 1814).

MARTIN GARDNER (1984). *Festival mágico-matemático.* Madrid: Alianza Editorial.

PIAGET, J. e INHELDER, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: P.U.F.

Resumen

En este trabajo se estudia el proceso de evolución histórica de las ideas sobre los fenómenos aleatorios, las connotaciones filosóficas que tienen esas ideas, su formalización matemática y la forma en la que situaciones paradójicas surgen en ese desarrollo y tienen profundas implicaciones didácticas.

Palabras clave: probabilidad, historia, epistemología, didáctica.

Abstract

This paper deals with the historical evolution of ideas on probabilistic phenomena, their philosophical implications, their mathematical formulae and how paradoxical situations arise within their development. These situations have important methodological implications.

Key words: Probability, History, Epistemology, Didactic.

César Sáenz Castro
Instituto de Ciencias de la Educación
Universidad Autónoma de Madrid
Ciudad Universitaria de Cantoblanco
28049 MADRID

reseñas

ARIAS CABEZAS, J.M., ARES, E., CARPINTERO, E., DE LAS HERAS, M.I., PÉREZ, S.A., SANZ, F.J.

Libros de Matemáticas para la ESO, 1º, 2º, 3º, 4º A y 4º B Editorial Casals-Magisterio

Existen libros de matemáticas que, sin pretender hacer grandes revoluciones, facilitan la tarea de dar, y si es posible de mejorar, nuestras clases. Este es el caso de los libros que vamos a comentar. Los textos de los distintos cursos de ESO de la editorial Casals-Magisterio son unos magníficos manuales que ofrecen unas matemáticas rigurosas y formales, no carentes de la concreción, utilidad y sencillez expositiva tan necesaria en estos niveles educativos.

Se presenta un contenido y se plantea la forma de atacarlo de una forma eficaz, para ir aprendiendo sin sobresaltos, de forma continua y de la propia experiencia. Interesan los contenidos matemáticos, pero también interesan los procesos matemáticos y las soluciones que hacen que los contenidos aparezcan de forma *viva* y necesarios.

Son unos textos que realmente ofrecen todo su potencial cuando se usan en clase. Aceptando que la utilidad de cualquier libro depende de la energía con la que se trabajan las cuestiones planteadas, la estructura de estos textos y de sus unidades, es tal, que permite, con una gran comodidad, hacer lecturas diversas de cada unidad. La cantidad de las actividades planteadas y su variedad permiten tratar de diversas formas nuestras necesidades del aula.

Hay tres factores que determinan un aprendizaje significativo:

- La materia debe ser potencialmente significativa.
- Los contenidos nuevos deben enlazar con lo que el alumno sabe.
- El alumno debe querer aprender significativamente.

Resolver los dos primeros factores depende, casi en su totalidad, de la materia y de la secuenciación y organización que se haga con los contenidos. En el tercero, intervienen un conjunto de variables humanas y psicológicas que hacen más difícil su solución.

La lectura de los textos permite observar que los dos primeros factores se resuelven de forma magistral. Para el tercero, los autores, a los que se les notan horas de clase, utilizan de forma sabia el más viejo, pero no menos efectivo procedimiento de estimular el éxito. La variedad y cuidada secuenciación de actividades y el uso de diversos instrumentos para realizarlas, permitirán a todos los alumnos, como se ha dicho anteriormente, ir aprendiendo y logrando éxitos que les estimularán.

Cada libro tiene 15 unidades todas ellas con la misma estructura:

1. Introducción

Proporciona al alumnado un conjunto de datos sobre los contenidos que van a ser tratados desde una doble perspectiva:

Histórica y epistemológica: centra los contenidos en el momento preciso de la evolución del pensamiento matemático.

Utilidad: Apunta para qué sirven los contenidos y los problemas de diversos ámbitos que pueden resolverse con ellos.

2. Presentación de contenidos

Los contenidos de la unidad se desarrollan en tres apartados, y en cada uno de ellos hay tres secciones:

Experimenta: Es un conjunto de actividades que permiten detectar el nivel de nuestros alumnos y centrar lo fundamental de la unidad de una forma general. En este sentido, esta sección permite elaborar un verdadero organizador previo de la unidad.

Proponer ejemplos, hacer un gráfico, experimentar o simular, conjeturar, etc. son procedimientos que el alumnado pondrá en funcionamiento en esta sección y le permitirán sacar mejor provecho de la unidad.

Exposición de contenidos: Se retoma en esta sección algo que parece estaba olvidándose en los manuales de matemáticas: la definición. En una epidemia de fiebre procedimental, se habían llenado los manuales de procedimientos que, al final, resultaban automatismos vacíos. El procedimiento es fundamental, pero aún lo es más el concepto. En esta sección se define y se pone un ejemplo; se explica una propiedad y se ejemplifica; se expone un procedimiento y se ejemplifica. Y así, en una corriente continua de explicación formal y concreta y, a la vez, sencilla y útil, el alumnado construye, éxito a éxito, la estructura que le permitirá enfrentarse con la resolución de tareas más complejas.

Resuelve: Termina cada bloque con una batería de ejercicios de aplicación de los contenidos tratados que permite ejercitarse y fijar ideas.

3. Árbol de contenidos

Se ofrece al alumnado un esquema de los contenidos tratados en la unidad.

4. Notaciones

Un listado útil de los signos, símbolos y notaciones usados.

5. Evitar errores

Un recordatorio de forma sintética de lo que durante la clase se ha advertido que son errores frecuentes y que no se deben cometer.

6. Chequeos y problemas

Una batería de actividades clasificada en chequeos y problemas. En los chequeos el alumnado encontrará ejercicios con los que trabajará la aplicación de un concepto, de una relación, de unos operadores y de los procedimientos y automatismos que se han enseñado en la lección. En los problemas, el alumnado se enfrentará a situaciones contextualizadas que deben ser resueltas y comprenderá que el proceso o conjunto de procesos para llegar a la solución no es tan sencillo y aparente; es decir, problemas.

7. Cálculo mental

Son ejercicios de cálculo mental sobre los contenidos tratados, pero en los que el alumnado debe utilizar siempre una estrategia. Son unos ejercicios realmente útiles para trabajar desde una perspectiva creativa.

8. Calculadora

Cerrar los ojos a finales del siglo XX a los medios o instrumentos electrónicos que nos rodean es algo que no debemos hacer los docentes. Hacen los autores una presentación, tan exquisita como didáctica, del uso de la calculadora que realmente se convierte en un instrumento al servicio de la matemática. Se usa para lo que se debe usar y el alumnado se enriquece a través de un aprendizaje útil.

9. Informática: Derive

En el mismo sentido que el apartado anterior, se desarrolla esta sección. El ordenador y sus programas, en este caso el Derive, están al servicio de unos contenidos que se han trabajado en la unidad.

10. Curiosidades

Una ventana abierta a lo anecdótico, a la relación de los contenidos con otras áreas, a un dato histórico relevante y curioso, etc.

11. Taller de investigación

Una actividad que, como declaran los autores, no está para que la totalidad del alumnado la lleve a cabo. Es una sección que puede hacerse en clase o puede trabajarse individualmente con el grupo de alumnado claramente mejor dotado para la reflexión, el análisis y el gusto por la belleza de un trabajo más complejo.

Los manuales ofrecen también una propuesta didáctica en la que el docente encontrará todos los elementos curriculares organizados y todas las ayudas que se puedan imaginar para trabajar en clase.

Los profesores de matemáticas debemos de alegrarnos de que la editorial Casals-Magisterio haya sabido recoger el fruto de unos maestros y profesores, y que haya editado estos magníficos libros que ya están dando alegrías a los docentes que los usamos.

Ildefonso Maza Sáez
Profesor de Matemáticas de Educación Secundaria

PERALTA, J.
Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática
Madrid: Huerga & Fierro, De., 1995, 230 págs.

Partido por gala en dos, como en el viejo verso tan repetido, así se nos presenta el libro del Prof. Peralta: dos partes de, prácticamente, la misma extensión y casi simétricas, como los labios que describe el poeta.

La primera, que está destinada a la consideración de los fundamentos didácticos y metodológicos, representa el enorme esfuerzo de coordinar dos mundos que generalmente han ido siempre por separado y que, como dice el propio autor, se han dedicado, respectivamente, "a la enumeración, por un lado, de unos principios didácticos generales y, por otro, al estudio de matemáticas secas, sin que exista un nexo de unión entre ambos y no se haga patente, por tanto, la aplicación de tales principios a la enseñanza efectiva de las matemáticas."

Fiel a su propósito, el de establecer este nexo, ya desde la tercera página comienza a aplicar explícitamente a la enseñanza de la matemática los principios y métodos que proceden de una didáctica general pero que aquí se personalizan en una muy concreta. No rehuye estudiar el rechazo al aprendizaje de las matemáticas, su defectuosa enseñanza y las posibles soluciones, así como poner el acento en temas propios de ella, como la resolución de problemas o la utilización del proceso histórico de sus ideas para así humanizar su enseñanza. Innumerables citas, argumentos y opiniones de variados autores, matemáticos o no, van salpicando todo el texto y justificando su postura; como que casi da la impresión de que el autor buscara parapetarse un poco ante el riesgo de que, como todo el que se pone en medio de dos posiciones, reciba de una y otra el correspondiente varapalo. Creo, por el contrario, que ha sabido hacer una buena síntesis de las dos, aplicando al tratamiento de la matemática todo el sentido común de quien, conociéndola bien, entiende que hay que saber también enseñarla. No se tema encontrar aquí, como en algunos textos pedagógicos, nomenclaturas raras o gárrulas explicaciones, sino una clara exposición de ambos frentes ahora unidos, el pedagógico y el matemático.

La segunda parte es, me parece, más agradable para el recreo del matemático típico. Se dedica a las didácticas específicas de las disciplinas en que se acostumbra a dividir la matemática secundaria: aritmética, álgebra, geometría, análisis y estadística. Para cada una de ellas dibuja un pequeño recorrido histórico, suficiente para seguir la formación de los conceptos; la didáctica particular que le es propia, con numerosos modelos; y, finalmente, una colección de los que él llama curiosidades y problemas de interés didáctico o histórico, cuya sola enunciación, que no voy a hacer aquí, pone seguramente en ganas de explorar. En suma, un libro de larga utilidad para el profesor de matemáticas y para el alumno que aspire a serlo; o que no aspire pero quiera conocerlas un poco.

Para escribirlo se requería un autor que reuniese las dos disposiciones varias veces aludidas aquí. Javier Peralta es, en efecto, licenciado en la especialidad de Matemática pura y doctor en Matemáticas en el área de Topología y Geometría. Pero ha sido también varios años catedrático de Instituto, profesor de Metodología de la Matemática y Prácticas de Enseñanza de la Universidad Complutense y, actualmente, catedrático de la E.U. de Formación del Profesorado "Santa María" de la Universidad Autónoma de Madrid. Puedo hablar de él con cierta autoridad, pues desde que inició sus estudios de primer curso de Licenciatura le he tenido un poco "pegado" a mí, como alumno, como ayudante después, o en la elaboración de la tesina y de la tesis doctoral; todavía hoy sigue colaborando conmigo en un rasgo de fidelidad y, no sé si tal vez también, de simpática testarudez y contumacia. Reconocer todo esto podría quizás inhabilitarme para hacer estos comentarios a su libro: a pesar de ello, espero no haber hipotecado la verdad.

José Javier Etayo
Dpto. de Topología y Geometría
U.C.M.
Real Academia de Ciencias

libros recibidos

(1996): *Cuadernos para la Coeducación. Lengua y Literatura*. Colección Materiales Curriculares INNOVA. Madrid: Centro de Desarrollo Curricular. M.E.C.

(1996): *Cuadernos para la Coeducación. Matemáticas*. Colección Materiales Curriculares INNOVA. Madrid: Centro de Desarrollo Curricular. M.E.C.

(1996): *Cuadernos para la Coeducación. Tecnología*. Colección Materiales Curriculares INNOVA. Madrid: Centro de Desarrollo Curricular. M.E.C.

(1996): *Educación Abierta*. N^{os}: 121, 122, 123, 124, 125 y 126. Zaragoza: I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.

(1996): *Guía para una Educación Física no Sexista*. Madrid: Centro de Desarrollo Curricular. M.E.C.

(1996): *Lengua Extranjera I: Francés*. Materiales Didácticos 2. Madrid: Centro de Desarrollo Curricular. M.E.C.

(1996): *Mil libros. Una selección bibliográfica*. Salamanca: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.

(1996): *Prevención de drogodependencias en la Comunidad Escolar*. Guía de materiales y recursos. Madrid: Centro de Desarrollo Curricular. M.E.C.

(1996): *Programación Lengua Extranjera: Inglés (1)*. Secundaria Obligatoria: 3er curso. Madrid: Centro de Desarrollo Curricular. M.E.C.

(1996): *Revista de Educación*. Nº 9. Granada: Universidad de Granada.

ACÍN FRANCO, M.; AZÓN ALCALÁ, Mª.J.; CERECEDA VIÑUALES, A.C.; LABARTA CAMACHO, A.; LUMBIERRES GABÁS, Mª.A. y PÉREZ ABADÍA, Mª.C. (1996): *L'Europe, c'est nous*. Zaragoza: I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.

ALONSO, J.A. y BENITO, Y. (1996): *Superdotados: Adaptación escolar y social en secundaria*. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.

ÁLVARO, J.L.; GARRIDO, A. y TORREGROSA, J.R. (Coord.)(1996): *Psicología social aplicada*. Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.

APPLE, M.W. (1996): *Política cultural y educación*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

ARANDA, R.E. (1996): *Estimulación de aprendizajes en la etapa infantil*. Madrid: Editorial Escuela Española, S.A.

ASENSIO VELA, M.; CRISTÓBAL TOMÁS, M.F.; ESPÍN TERUEL, A. y FACI LUCÍA, Mª.J. (1996): *De la vivienda a la lengua*. Zaragoza: I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.

BRIHUEGA NIETO, J. (Coord.)(1996): *Materia-*

les Didácticos 1. Taller de Matemáticas. Secundaria Obligatoria. Madrid: Centro de Desarrollo Curricular. M.E.C.

CALSINA, C. y FERNÁNDEZ, R. (1996): *LOGODRAC. Ejercicios de discriminación logopédica.* Madrid: Editorial Escuela Española, S.A.

CARR, W. (1996): *Una teoría para la educación. Hacia una investigación educativa crítica.* Madrid: Ediciones Morata, S.L.

CARRETERO, M. (1996): *Construir y enseñar. Las Ciencias Sociales y la Historia.* Madrid: Visor Distribuciones, S.A.

CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR (1996): *Materiales Didácticos 2. Tecnología. 4º Curso. Secundaria Obligatoria.* Madrid: Centro de Desarrollo Curricular. M.E.C.

DÍAZ-AGUADO, Mª.J. y Otros. (1996): *Infancia en situación de riesgo social. Un instrumento para su detección a través de la escuela.* 2 Ejemplares. Madrid: Consejería de Educación y Cultura. Comunidad de Madrid.

DREWERMANN, E. (1996): *El mensaje de las mujeres. La ciencia del amor.* Barcelona: Editorial Herder, S.A.

DREWERMANN, E. (1996): *La palabra de salvación y sanación. La fuerza liberadora de la fe.* Barcelona: Editorial Herder, S.A.

FERNÁNDEZ PARCÉS, Mª. P.; LOSCERTALES PALOMAR, M. y RODRÍGUEZ CHARLE, I. (1997): *La Tierra, un planeta para la vida.* Zaragoza: I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.

FÜSGEN, I. (1996): *La incontinencia de orina. Saber afrontar este impedimento físico oculto.* Barcelona: Editorial Herder, S.A.

GÓMEZ DACAL, G. (1996): *Curso de organización escolar y general.* Madrid: Editorial Escuela Española, S.A.

GONZÁLEZ RAMOS, J.; GONZÁLEZ SOLER, L.; GUTIÉRREZ SOTO, F.; LÓPEZ MOJARRO, M. y RUEDA PRIETO, J. (1996): *El Proyecto Curricular: Elaboración en un Centro de Educación de Personas Adultas.* Madrid: Editorial Escuela Española, S.A.

HASKINS, S. (1996): *María Magdalena. Mito y metáfora.* Barcelona: Editorial Herder, S.A.

I.C.E. (1996): *Dirección participativa y evaluación de Centros.* II Congreso Internacional sobre Dirección de Centros Docentes. Bilbao: I.C.E. de la Universidad de Deusto.

I.C.E. (1996): *Estrategias e prácticas en educación Ambiental.* Congreso Internacional. La Coruña: I.C.E. de la Universidad de Santiago de Compostela. 2 ejemplares.

I.C.E.: *Educación Abierta.* Números 121, 122, 123, 124, 125 y 126. Zaragoza: I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.

I.E.P.S. (1996): *Ciencia multicultural y no racista. Enfoques y estrategias para el aula.* Nº 63. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.

JACQUARD, A. (1996): *La preocupación por los pobres.* Barcelona: Editorial Herder, S.A.

JORDÁN, J.A. (1997): *Propuestas de educación intercultural para profesores.* Barcelona: Grupo Editorial CEAC, S.A.

KEIZER, B. (1996): *Danzando con la muerte. Memorias de un médico.* Barcelona: Editorial Herder, S.A.

KOLAKOWSKI, L. (1996): *Dios no nos debe nada. Un breve comentario sobre la religión de Pascal y el espíritu del jansenismo.* Barcelona: Editorial Herder, S.A.

LOBATO, C. (1996): *Desarrollo profesional y* *prácticum en la Universidad*. Leioa: I.C.E. de la Universidad del País Vasco.

MELCHIOR-BONNET, S. (1996): *Historia del espejo*. Barcelona: Editorial Herder, S.A.

MORALES, J.F. y OLZA, M. (Coords.)(1996). *Psicología social y trabajo social*. Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.

POZO MUNICIO, J.I. (1996): *Aprendices y Maestros*. Madrid: Alianza Editorial, S.A.

PUEYO, A.A. (1996): *Manual de psicología diferencial*. Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.

RILKE. (1996): *El amor de Magdalena*. Barcelona: Editorial Herder, S.A.

SANTOS TAMBO, P.; VILLUENDAS CALVO, A. y YARZA GUMIEL, F. (1996): *S.O.S., The earth's danger*. Zaragoza: I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.

SCHREINER, K. (1996): *María. Virgen, Madre, Reina*. Barcelona: Editorial Herder, S.A.

VELÁZQUEZ CALLADO, C. (1996): *Actividades prácticas en Educación Física. Cómo utilizar materiales de desecho*. Madrid: Editorial Escuela Española, S.A.

VILLA SÁNCHEZ, A.; AUZMENDI ESCRIBANO, E. y VILLARDÓN GALLEGO, L. (1996): *Los Equipos Directivos ante el uso de la Evaluación. Creencias, actitudes y conductas directivas*. Bilbao: I.C.E. de la Universidad de Deusto.

VILLARROYA SAMANIEGO, E. (1996): *Ejercicios para el desarrollo de la Coordinación Visomotora. Educación infantil y primer ciclo de primaria. Primeros trazos*. Nº 1. Madrid: Editorial Escuela Española, S.A.

VILLARROYA SAMANIEGO, E. (1996): *Ejercicios para el desarrollo de la Coordinación Visomotora. Educación infantil y primer ciclo de primaria. Preescritura*. Nº 2. Madrid: Editorial Escuela Española, S.A.

ZABALZA, M.A. (1996): *Calidad en la Educación Infantil*. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.

normas para los autores

1) *TARBIYA, Revista de Investigación e Innovación Educativa*, admite trabajos y artículos inéditos, en castellano para cada una de sus secciones. La aceptación de los mismos corresponde al Consejo Editorial y serán remitidos a nombre de la Revista o al Editor.
2) Los originales deberán enviarse por triplicado, mecanografiados a doble espacio por una sola cara en hojas DIN A-4 y con un margen neto a la izquierda. Su extensión no excederá de 20 folios (iconografía aparte).
3) Se incluirá una primera página en la que se indicarán en el siguiente orden: título del trabajo, nombre y apellidos del autor o autores y centro de trabajo de los mismos con su dirección completa que posibilite correspondencia. Igualmente figurará un resumen en castellano y su traducción inglesa, de no más de 200 palabras, así como de 3 a 6 palabras claves en ambos idiomas.
4) Los trabajos de experimentos de investigación constarán de introducción, métodos, resultados, discusión y referencias.
5) Las referencias bibliográficas en el seno del texto, se citarán entre paréntesis con el apellido(s) del autor y año. Si el nombre del autor figura en el texto, se citará únicamente el año entre paréntesis.
6) La bibliografía se incluirá al final del trabajo en orden alfabético de apellidos, siguiendo los siguientes criterios: autor(es), año, título completo, lugar de edición y editorial. En el caso de artículos de revistas se incluirá: autor(es), año, título, nombre de la revista, número de páginas. Ejemplos:
   BRINCONES, I. (Comp.) (1991). *Lecturas para la formación inicial del profesorado*. Madrid: Ediciones de la U.A.M.
   GONZÁLEZ, E. (1991). Escalas Reynell, adaptación a la población española. *Cuadernos del I.C.E.*, 18, 33-50.
7) Las notas se relacionarán numeradas a pie de página. Si dichas notas incluyesen referencias bibliográficas, se citarán según el criterio fijado en el punto 5°.
8) Las tablas, figuras, cuadros, gráficos, esquemas y diagramas, se presentarán en tinta negra sobre papel blanco. Se enviarán en hojas independientes numeradas y con su título o texto explicativo (si lo hubiera) mecanografiado a doble espacio en hoja aparte. El autor marcará en el margen del texto, a lápiz, con el número correspondiente la ubicación aproximada en la que deberán aparecer los materiales iconográficos, independiente de que aparezca explícitamente señalado en el texto.
9) Salvo casos excepcionales no se admitirán fotografías, que deberán ser en blanco y negro, en brillo y de calidad suficiente para su reproducción. Su tamaño no será inferior a 6 x 9. Deberán ir numeradas al dorso indicando el apellido del autor o primer autor del trabajo. Sus títulos o textos (si los hubiera) deberán no superar los cuatro renglones, mecanografiados a doble espacio en hoja aparte. Igualmente se indicará en el margen del texto, a lápiz, su ubicación aproximada. Fotografías y textos se enviarán dentro de un sobre propio.
10) Los originales que deban ser modificados para su publicación, serán enviados a sus autores. Así mismo se comunicará la aceptación de trabajos para su publicación.

colección cuadernos del ICE

1. **BRINCONES, I. (Comp.)**
Lecciones para formación inicial del profesorado
1990 | 239 páginas | ISBN: 84-7477-312-1 | PVP: 1.500 ptas.

2. **BOSQUE, J.; MORENO, A.; MUGURUZA, C.; RODRÍGUEZ, V.; SANTOS, J. M. y SUERO, J.**
DEMOS, un programa para la enseñanza y el estudio con ordenador del crecimiento de la población.
1990 | 129 páginas y Disquete $3^1/_2$ | ISBN: 84-7477-368-7 | PVP: 2.500 ptas.

3. **ARROYO ILERA, F. (Comp.)**
Lecturas sobre medio ambiente, algunas aplicaciones educativas.
1992 | 196 páginas | ISBN: 84-7477-377-6 | PVP: 1.500 ptas.

4. **GRUPO LOGO MADRID**
Hoja de cálculo en la enseñanza de las matemáticas en secundaria.
1992 | 132 páginas y Disquete $3^1/_2$ | ISBN: 84-7477-409-8 | PVP: 2.000 ptas.

5. **ALONSO TAPIA, J. (Dir.)**
¿Qué es lo mejor para motivar a mis alumnos? Análisis de lo que los profesores saben, creen y hacen al respecto.
1992 | 134 páginas | ISBN: 84-7477-408-X | PVP: 1.000 ptas.

6. **GARCÍA SOLÉ, J. y JAQUE RECHEA, F. (Comps.)**
Temas actuales de la física.
1992 | 203 páginas | ISBN: 84-7477-407-1 | PVP: 1.200 ptas.

7. **MALDONADO, A.; SEBASTIÁN, E. y SOTO, P.**
Retraso en lectura: evaluación y tratamiento educativo.
1992 | 127 páginas | ISBN: 84-7477-419-5 | PVP: 1.000 ptas.

8. **GARCÍA RUANO, S.L. (comp.)**
Curso de actualización en la química: aspectos relevantes de la química actual.
1993 | 357 páginas | ISBN: 84-7477-461-6 | PVP: 1.700 ptas.

9. **TAIBO, C.**
Los cambios en el Este. Una guía introductoria.
1994 | 180 páginas | ISBN: 84-7477-473-1 | PVP: 1.515 ptas.

10. **CARRIEDO, N. y ALONSO TAPIA, J.**
¿Cómo enseñar a comprender un texto?
1994 | 292 páginas | ISBN: 84-7477-474-8 | PVP: 2.322 ptas.

11. **ÁLVAREZ, J. B. y POLO, A. (comps.)**
Una contribución a la educación ambiental: El tratamiento de residuos urbanos.
1994 | 324 páginas | ISBN: 84-7477-472-1 | PVP: 2.525 ptas.

12. **RODRÍGUEZ MONEO (Comp.)**
La psicología del aprendizaje en la formación inicial del profesorado.
1995 | 198 páginas | ISBN: 84-7477-501-9 | PVP: 1.500 ptas.

13. **BRINCONES, I.**

La construcción del conocimiento. Aplicaciones para la enseñanza de la física.

1995	132 páginas	ISBN: 84-7477-506-X	PVP: 1.000 ptas.

14. **MELCÓN, J.**

La enseñanza de la geografía en los orígenes de la España Contemporánea.

1995	216 páginas	ISBN: 84-7477-577-5	PVP: 2.400 ptas.

15. **RUBIO, N.**

Los bosques españoles. Introducción al estudio de la vegetación. Guía didáctica y 36 diapositivas.

1996	106 páginas y 36 diapositivas	ISBN: 84-7477-569-8	PVP: 2.400 ptas.

16. **LEÓN, S.A.; MARTÍN, A., PÉREZ, O. (comp.)**

La comprensión de la prensa en contextos educativos.

1996	245 páginas	ISBN: 84-7477-602-3	PVP: 2.200 ptas.

17. **PERALTA, F.J.**

Una incursión en los números irracionales y algunas ideas para obtener aproximaciones a los mismos.

1996	117 páginas	ISBN: 84-7477-569-8	

tarbiya
Revista de investigación e innovación educativa

UAM
UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE MADRID
INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN
PARA EL AÑO 1997 (3 NÚMEROS)

Apellidos .... Nombre ....

Calle .... Nº .... Código Postal ....

Ciudad .... Provincia .... Tfno. ....

PRECIO DE LA SUSCRIPCIÓN (gastos de envío incluidos):

	– Nacional	2.250 Ptas.
	– Extranjero	3.000 Ptas.
NÚMEROS SUELTOS:		800 Ptas.

FORMA DE PAGO: Talón a nombre de: Fundación General de la U.A.M. - TARBIYA
(En caso de solicitar factura indicar el NIF o CIF).

SUSCRIPCIÓN:
Servicio de Publicaciones
Instituto de Ciencias de la Educación
Campus Universitario de Cantoblanco
28049 MADRID
Tlfno.: 397 49 97

UAM
UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE MADRID

800 ptas.